Cvičenie 10

Písomka

Riešte úlohu o malých kmitoch systému s lagranžiánom $L = \frac{1}{2}m(R^2\varphi^2 + \frac{L^2}{12})\dot{\varphi}^2 - mgr(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$. Systém vykonáva malé kmity okolo rovnovážnej polohy $\varphi_0 = 0$. Zapíšte všeobecné riešenie $\varphi(t)$.

Prepočítané príklady

- Malé kmity Foucaultovho kyvadla 9.10

Domáca úloha

- Nájdite frekvenciu malých kmitov fyzikálneho kyvadla - homogénnej paličky dĺžky L a hmotnosti M.
- Vyriešte úlohu pre malé kmity guličky s hmotnosťou m s daným lagranžiánom:
  $L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{h}{d^2}e^{\frac{x^2+4y^2}{d^2}}(x\dot{x} + 4y\dot{y})\right)^2\right] - \frac{1}{2}mghe^{\frac{x^2+4y^2}{d^2}}$.
  Parametre h a d opisujú tvar vaničky, v ktorej sa gulička pohybuje.
- Vyriešte úlohu pre malé kmity sústavy 3 hmotných bodov (s hmotnosťami v poradí m, M, m) a 4 vodorovných pružín (s tuhosťami k). Riešenie (kvalitatívne) skúste najprv uhádnuť. Čo by sa zmenilo, keby mali všetky hmotné body rovnakú hmotnosť? Čo by sa zmenilo, keby sme dve krajnú pružiny vymenili za nové s väčšou/menšou tuhosťou?
- príklady 8.1, 8.6 zo zbierky
- príklady 9.5 - 9.9 zo zbierky
- ďalšie príklady zo stránky druhého cvičiaceho

Treba si zapamätať

- Sily v neinerciálnej sústave:

$$m\vec{a} = \vec{F} \underbrace{-m\vec{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m(\vec{\omega}\times\vec{v})}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{Odstreď}}$$

- Kuchynský recept na malé kmity:

  1. $T, U \longrightarrow L = T - U$
  2. rovnovážna poloha (minimum potenciálnej energie): bod $q_0 = (q_0^1, q_0^2, \cdots q_0^n)$

3. Taylorov rozvoj U okolo rovnovážnej polohy:

   $U = U(q_0) + \partial_a U|_{q_0}(q^a - q_0^a) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}(q^a - q_0^a)(q^b - q_0^b) + ...$, kde $\partial_a U|_{q_0} = 0$,

   potom $M_{ab} = T_{ab}(q_0)$, $K_{ab} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}$

4. $L = \frac{1}{2}M_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b - \frac{1}{2}K_{ab}x^a x^b$ pre $x^a = q^a - q_0^a$ (nové súradnice s počiatkom v rovnovážnej polohe)

5. Lagrangeove rovnice: $M_{ab}\ddot{x}^b + K_{ab}x^b = 0$

6. ansatz $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} cos(\omega t + \alpha)$

   dosadený do Lagrangeových rovníc dáva sústavu rovníc

   (musí platiť pre $\forall t$, teda aj pre $t = 0$): $\Big(K - \omega^2 M\Big) \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Sústava má nenulové riešenie ($\forall k^i$ nie sú naraz $= 0$) len pre ω^2 spĺňajúce $det(K - \omega^2 M) = 0$. Riešenie rovnice dáva charakteristické frekvencie módov $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$.

8. Pre každú frekvenciu ω_i existuje stĺpček amplitúd $(k_i^1, k_i^2, \cdots k_i^n)^T$ z bodu 6 získaný dosadením ω_i do sústavy rovníc z bodu 6.

9. i. mód: $\begin{pmatrix} x_i^1(t) \\ x_i^2(t) \\ \vdots \\ x_i^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

10. Všeobecné riešenie je lineárnou kombináciou všetkých módov:

    $$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

    Neznáme konštanty a_i, α_i nájdeme z počiatočných podmienok.