Cvičenie 11

Písomka

Riešte úlohu o malých kmitoch systému s lagranžiánom $L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x} & \dot{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.
Zapíšte všeobecné riešenie.

Prepočítané príklady

- Tenzor zotrvačnosti homogénnej gule v hlavných osiach.
- Moment hybnosti vodorovného prstenca, ktorý rotuje okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom a odklonenej od zvislej osi o uhol α.
- Všeobecný výpočet zrýchlenia telies s polomerom R a hmotnosťou M pri valení sa po naklonenej rovine.
- Dokončenie príkladu z prednášky o pohybe voľného symetrického zotrvačníka.

Domáca úloha

- 9.1 zo zbierky,
- Príklady na momenty zotrvačnosti
- Vypočítajte tenzor zotrvačnosti homogénneho kvádra so štvorcovou podstavou s dĺžkami hrán $2a$, $2a$, $4a$ v hlavných osiach. Vypočítajte tenzor zotrvačnosti rovnakého kvádra, ale v telesových osiach s počiatkom v ľavom dolnom prednom rohu (osi splývajú s hranami kvádra). Na výpočet použite najprv vzorec pre komponenty tenzora zotrvačnosti, potom odvoďte a použite Steinerovu vetu, výsledky porovnajte (výpočet je na konci tohto pdf).
- Ďalšie príklady zo stránky druhého cvičiaceho.

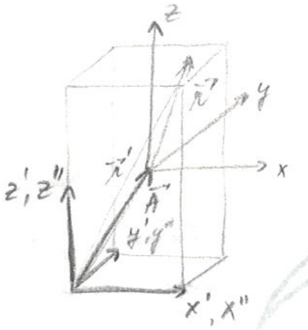
Treba si zapamätať

- Tenzor zotrvačnosti: $I_{ij} = \int dm(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)$
- Eulerove uhly: φ, ϑ, ψ
- Eulerove kinematické $(\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t))$ a dynamické $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ rovnice

S_1 = telesové osi $\equiv$ hlavné osi (x, y, z)

S_2 = telesové osi (x', y', z')

S_3 = laboratórne osi (x'', y'', z'')



$\Rightarrow I$ v S_1 : $\{\vec{r};\ x_1 \in \langle -a, a\rangle,\ x_2 \in \langle -a, a\rangle,\ x_3 \in \langle -2a, 2a\rangle\}$ $\qquad dm = \rho\, dV = \frac{M}{16a^3}\, dx\, dy\, dz$

$$I_{11} = \int dm\,(\delta_{11} r^2 - x^2) = \frac{M}{16a^3}\int (y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{M}{16a^3} a^5\left[\frac{2}{3}2.4 + \frac{16}{3}2.2\right] = Ma^2\frac{5}{3}$$

$$I_{22} = \int dm\,(x^2+z^2) = \frac{M}{16a^3} a^5\left[\frac{2}{3}2.4 + \frac{16}{3}2.2\right] = Ma^2\frac{5}{3}$$

$$I_{33} = \int dm\,(x^2+y^2) = \frac{M}{16a^3} a^5\left[\frac{2}{3}2.4 + \frac{2}{3}2.4\right] = Ma^2\frac{2}{3}$$

$$I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{Ma^2}{3}$$

$$I_{12} = \int dm\,(-xy) = \frac{M}{16a^3}\int (-xy)\, dx\, dy\, dz = \frac{M}{16a^3} a^5 . 0 = 0$$

$$I_{13} = \int dm\,(-xz) = 0 = I_{23}$$

$\Rightarrow I$ v $S_2 \equiv I'$: $S_2 = S_1 + \underbrace{(+a, +a, +2a)}_{\vec{A}}$ $\qquad A^2 = a^2(1+1+4) = 6a^2$

$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{A}$ $\qquad \{\vec{r}\,';\ x_1' \in \langle 0, 2a\rangle,\ x_2' \in \langle 0, 2a\rangle,\ x_3' \in \langle 0, 4a\rangle\}$

vzorec pre výpočet I je vždy rovnaký $\Rightarrow I'_{ij} = \int dm\,(\delta_{ij} r'^2 - x_i' x_j')$

$$I'_{11} = \int dm\,(r'^2 - x'^2) = \frac{M}{16a^3}\int (y'^2 + z'^2)\, dx'\, dy'\, dz' = \frac{M}{16a^3} a^5\left[\frac{8}{3}2.4 + \frac{64}{3}2.2\right] = Ma^2\frac{20}{3}$$

$$I'_{22} = \int dm\,(r'^2 - y'^2) = \frac{M}{16a^3}\int (x'^2 + z'^2)\, dx'\, dy'\, dz' = \frac{M}{16a^3} a^5\left[\frac{8}{3}2.4 + \frac{64}{3}2.2\right] = Ma^2\frac{20}{3}$$

$$I'_{33} = \int dm\,(r'^2 - z'^2) = \frac{M}{16a^3}\int (x'^2 + y'^2)\, dx'\, dy'\, dz' = \frac{M}{16a^3} a^5\left[\frac{8}{3}2.4.2\right] = Ma^2\frac{8}{3}$$

$$I'_{12} = \int dm\,(-x'y') = \frac{M}{16a^3} a^5\left[-2.2.4\right] = -Ma^2$$

$$I'_{13} = \int dm\,(-x'z') = \frac{M}{16a^3} a^5\left[-2.8.2\right] = -2Ma^2 = I'_{23}$$

$$I' = \begin{pmatrix} 20 & -3 & -6 \\ -3 & 20 & -6 \\ -6 & -6 & 8 \end{pmatrix}\frac{Ma^2}{3}$$

alebo (keďže S_1 a S_2 majú paralelné osi):

$$I'_{ij} = \int dm\,(\delta_{ij} r'^2 - x_i' x_j') = \int dm\left(\delta_{ij}\left[\vec{r} + \vec{A}\right]^2 - (\vec{r} + \vec{A})_i (\vec{r} + \vec{A})_j\right) =$$

$$= \int dm\left(\delta_{ij}\left[r^2 + 2\vec{r}\cdot\vec{A} + A^2\right] - x_i x_j - x_i A_j - A_i x_j - A_i A_j\right) =$$

$$= \int dm\,(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) + \underbrace{\int dm\,(\delta_{ij} 2\vec{r}\cdot\vec{A} - x_i A_j - x_j A_i)} + \int dm\,(\delta_{ij} A^2 - A_i A_j) =$$

$$\longrightarrow 2\delta_{ij} A_k \underbrace{\int dm\, x_k}_{\substack{M x_{T_k} \\ = \\ 0}} - A_j \underbrace{\int dm\, x_i}_{\substack{M x_{T_i} \\ = \\ 0}} - A_i \underbrace{\int dm\, x_j}_{\substack{M x_{T_j} \\ = \\ 0}}$$

$$= I_{ij} + \underbrace{M(\delta_{ij} A^2 - A_i A_j)} = \frac{Ma^2}{3}\begin{pmatrix} 20 & -3 & -6 \\ -3 & 20 & -6 \\ -6 & -6 & 8 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Ma^2\begin{pmatrix} 6-1 & -1 & -2 \\ -1 & 6-1 & -2 \\ -1 & -2 & 6-4 \end{pmatrix} = Ma^2\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$