Cvičenie 9

Písomka

Škálovaním lagranžiánu $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Ax^4$ zistite, ako sa zmení perióda kmitov ak sa amplitúda zväčší 3x.

Prepočítané príklady

- Dokončenie príkladu na malé kmity dvojného matematického kyvadla.
- Malé kmity sférického kyvadla.
- Malé kmity pre systém z príkladu 3a.7.
- Nájdenie matíc M a K pre hmotný bod viazaný na plochu $z = a\left[(\frac{x}{a} - 2 + \cos\frac{y}{a})\frac{x}{a} - \cos\frac{y}{a} - 3\sin\frac{y}{a}\right]$ s minimom potenciálnej energie v bode $(x_0, y_0) = (a, \frac{\pi}{2}a)$.

Domáca úloha

- Nájdite frekvenciu malých kmitov fyzikálneho kyvadla - homogénnej paličky dĺžky L a hmotnosti M.
- Vyriešte úlohu pre malé kmity guličky s hmotnosťou m s daným lagranžiánom:
  $L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{h}{d^2}e^{\frac{x^2+4y^2}{d^2}}(x\dot{x} + 4y\dot{y})\right)^2\right] - \frac{1}{2}mghe^{\frac{x^2+4y^2}{d^2}}$.
  Parametre h a d opisujú tvar vaničky, v ktorej sa gulička pohybuje.
- Vyriešte úlohu pre malé kmity sústavy 3 hmotných bodov (s hmotnosťami v poradí m, M, m) a 4 vodorovných pružín (s tuhosťami k). Riešenie (kvalitatívne) skúste najprv uhádnuť. Čo by sa zmenilo, keby mali všetky hmotné body rovnakú hmotnosť?
- ďalšie príklady zo stránky druhého cvičiaceho

Treba si zapamätať

- Kuchynský recept na malé kmity:

  1. $T, U \longrightarrow L = T - U$
  2. rovnovážna poloha (minimum potenciálnej energie): bod $q_0 = (q_0^1, q_0^2, \cdots q_0^n)$

3. Taylorov rozvoj U okolo rovnovážnej polohy:

   $U = U(q_0) + \partial_a U|_{q_0}(q^a - q^a_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}(q^a - q^a_0)(q^b - q^b_0) + ...$, kde $\partial_a U|_{q_0} = 0$,

   potom $M_{ab} = T_{ab}(q_0)$, $K_{ab} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}$

4. $L = \frac{1}{2}M_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b - \frac{1}{2}K_{ab}x^a x^b$ pre $x^a = q^a - q^a_0$ (nové súradnice s počiatkom v rovnovážnej polohe)

5. Lagrangeove rovnice: $M_{ab}\ddot{x}^b + K_{ab}x^b = 0$

6. ansatz $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} cos(\omega t + \alpha)$

   dosadený do Lagrangeových rovníc dáva sústavu rovníc

   (musí platiť pre $\forall t$, teda aj pre $t = 0$): $\Big(K - \omega^2 M\Big) \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Sústava má nenulové riešenie ($\forall k^i$ nie sú naraz $= 0$) len pre ω^2 spĺňajúce $det(K - \omega^2 M) = 0$. Riešenie rovnice dáva charakteristické frekvencie módov $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$.

8. Pre každú frekvenciu ω_i existuje stĺpček amplitúd $(k^1_i, k^2_i, \cdots k^n_i)^T$ z bodu 6 získaný dosadením ω_i do sústavy rovníc z bodu 6.

9. i. mód: $\begin{pmatrix} x^1_i(t) \\ x^2_i(t) \\ \vdots \\ x^n_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1_i \\ k^2_i \\ \vdots \\ k^n_i \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

10. Všeobecné riešenie je lineárnou kombináciou všetkých módov:

    $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \begin{pmatrix} k^1_i \\ k^2_i \\ \vdots \\ k^n_i \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

    Neznáme konštanty a_i, α_i nájdeme z počiatočných podmienok.