

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ROZPOZNÁVANIE UMELECKÝCH DIEL
BAKALÁRSKA PRÁCA

2024

OLIVER LAŠTÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ROZPOZNÁVANIE UMELECKÝCH DIEL
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Aplikovaná Informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.

Bratislava, 2024
Oliver Laštík

Abstrakt

TODO

Klíčové slová: TODO

Abstract

TODO

Keywords: TODO

Obsah

Úvod	1
1 Vychodiská práce	3
1.1 Neurónové siete	3
1.1.1 Definícia a princípy	3
1.1.2 Typy neurónových sietí	3
1.1.3 Konvolučné neurónové siete (CNN)	3
1.1.4 Rekurentné neurónové siete (RNN)	4
1.1.5 Generatívne adversárne siete (GAN)	4
1.1.6 Použitie v praxi	5
1.2 Strojové učenie	5
1.2.1 Typy strojového učenia	5
1.2.2 Učenie s učiteľom (Supervised Learning)	5
1.2.3 Učenie bez učiteľa (Unsupervised Learning)	6
1.2.4 Posilňované učenie (Reinforcement Learning)	6
1.2.5 Aplikácie strojového učenia	6
1.2.6 Výzvy a budúci vývoj	6
1.3 Hlboké učenie	6
1.3.1 Architektúra modelov hlbokého učenia	7
1.3.2 Porovnanie frameworkov pre hlboké učenie	7
1.4 Existujúce systémy a inšpirácie	7
1.4.1 Prehľad relevantných systémov	7
1.4.2 Systémy pre rozpoznávanie obrazov	8
1.4.3 Inšpirácie a integrácie	8
1.4.4 Porovnanie	8
1.5 Použité technológie	8
1.5.1 Python	9
1.5.2 TensorFlow	9
1.5.3 Keras	9
1.5.4 NumPy	10

1.5.5	Scikit-Learn	10
1.5.6	Vyhodnotenie výkonu modelu	10
2	2	13
3	3	15
4	4	17
Záver		19

Úvod

TODO

Kapitola 1

Vychodiská práce

1.1 Neurónové siete

Neurónové siete predstavujú základ moderných techník strojového učenia, najmä v oblastiach, kde je potrebné spracovať veľké množstvá neštruktúrovaných dát, ako sú obrázky, zvuk a text. Tieto systémy sú inšpirované biologickými neurónovými sieťami, ktoré sa nachádzajú v mozgu, a sú schopné učiť sa a vykonávať úlohy bez explicitného programovania na základe príkladov, čo je známe ako učenie s učiteľom [19].

1.1.1 Definícia a princípy

Neurónová sieť je skonštruovaná z vrstiev neurónov, kde každý neurón je spojený s mnohými inými neurónmi v nasledujúcej vrstve. Tieto spojenia, známe ako váhy, sú upravované počas tréningu siete na základe rozdielu medzi predpovedaným výstupom a skutočným výstupom. Tento proces sa opakuje mnohokrát a je známy ako spätné šírenie chýb [23].

1.1.2 Typy neurónových sietí

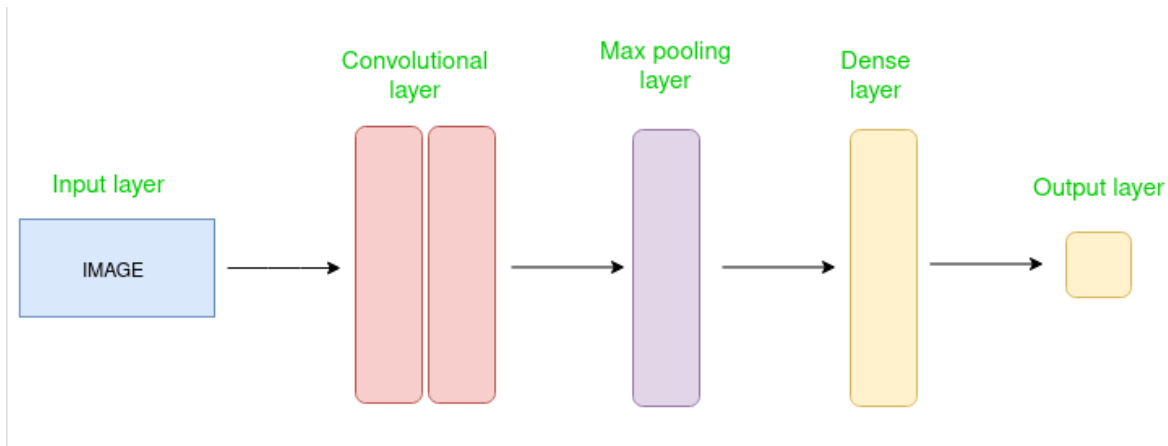
Medzi najvýznamnejšie typy neurónových sietí patria:

- **Konvolučné neurónové siete (CNN),**
- **Rekurentné neurónové siete (RNN),**
- **Generatívne adversárne siete (GAN)**

1.1.3 Konvolučné neurónové siete (CNN)

Konvolučné neurónové siete sú navrhnuté špeciálne pre analýzu vizuálnych obrazov. Tieto siete využívajú konvolučné vrstvy na efektívne filtrovanie vstupných obrazov a

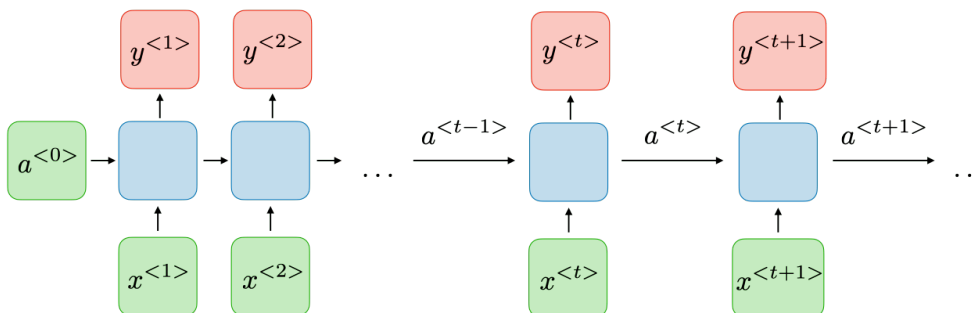
identifikáciu dôležitých vizuálnych prvkov bez nutnosti predspracovania, ktoré je často potrebné v tradičných algoritmoch strojového učenia [22].



Obr. 1.1: Jednoduchá architektúra konvolučnej neurónovej siete[1]

1.1.4 Rekurentné neurónové siete (RNN)

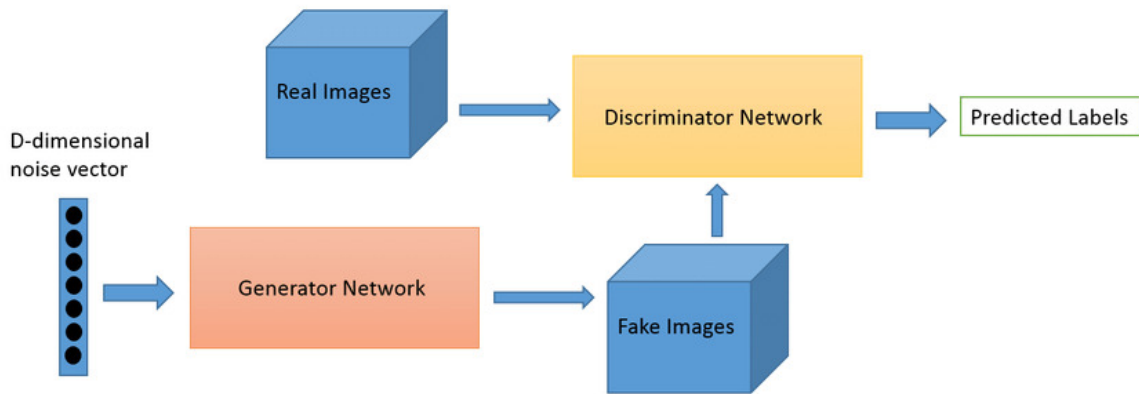
Rekurentné neurónové siete sú ideálne pre úlohy, kde sú vstupy a výstupy sekvencie dát, ako je text alebo časové rady. Tieto siete majú "pamäť", ktorá uchováva informácie o predošlých dátových bodoch a využíva ich pri generovaní nových výstupov, čo umožňuje efektívne spracovanie informácií s časovou závislosťou [13].



Obr. 1.2: Architektúra tradičnej rekurentnej neurónovej siete[2]

1.1.5 Generatívne adversárne siete (GAN)

GANs sú inovatívne v tom, že spočívajú v súčinnosti dvoch sietí: generátora, ktorý produkuje dáta, a diskriminátora, ktorý hodnotí, či sú dáta pravé alebo falzifikáty. Tento proces tréningu umožňuje modelom generovať vysoko kvalitné, verodostojné výstupy, ktoré sú užitočné v mnohých oblastiach vrátane digitálneho umenia a foto-realistickej syntézy [20].



Obr. 1.3: Architektúra tradičnej Generatívnej adversárnej siete[3]

1.1.6 Použitie v praxi

Praktické aplikácie neurónových sietí sú rozmanité a pôsobia v mnohých odvetviach. Od autonómnych vozidiel, ktoré používajú neurónové siete na spracovanie vizuálnych dát z kamier pre navigáciu, po pokročilé rozpoznávacie systémy v smartfónoch, ktoré dokážu identifikovať tváre alebo interpretovať dotykové vstupy. V medicíne neurónové siete umožňujú rýchlejšie a presnejšie diagnostikovanie chorôb z obrazových dát [28].

1.2 Strojové učenie

Strojové učenie je súbor umelej inteligencie, ktorý sa zaoberá vývojom algoritmov, ktoré sa dokážu učiť z dát a robiť rozhodnutia alebo predpovede na základe týchto dát. V súčasnosti sa strojové učenie stalo nevyhnutnou súčasťou mnohých aplikácií, kde je potrebné spracovávať veľké objemy dát a rýchlo reagovať na meniace sa podmienky bez ľudského zásahu [12].

1.2.1 Typy strojového učenia

Existujú tri hlavné typy strojového učenia:

- Učenie s učiteľom (supervised learning),
- Učenie bez učiteľa (unsupervised learning),
- Posilňované učenie (reinforcement learning)

1.2.2 Učenie s učiteľom (Supervised Learning)

Pri učení s učiteľom sú modely tréňované na predikciu výstupov založených na vstupných dátach, ktoré sú označené správnymi odpoveďami. Tento prístup je najčastejšie

používaný pri klasifikačných a regresných úlohách [12].

1.2.3 Učenie bez učiteľa (Unsupervised Learning)

Učenie bez učiteľa zahŕňa modely, ktoré analyzujú a klasifikujú dáta bez explicitných výstupov pre tréning. Tento typ učenia sa využíva na odhaľovanie zaujímavých vzorcov alebo štruktúr v dátach, ktoré nie sú predom označené [21].

1.2.4 Posilňované učenie (Reinforcement Learning)

V posilňovanom učení sú modely trénované na optimalizáciu ich rozhodovania na základe odmien získaných za svoje akcie. Tento prístup je užitočný pri návrhu systémov, ktoré musia fungovať v dynamickom a často nepredvídateľnom prostredí [31].

1.2.5 Aplikácie strojového učenia

Strojové učenie sa uplatňuje v širokej škále odvetví vrátane automobilového priemyslu, zdravotníctva, financií a ďalších. Automatizované vozidlá využívajú tieto technológie na zlepšenie bezpečnosti a efektivity, zatiaľ čo v zdravotníctve pomáhajú pri rozpoznávaní a diagnostike ochorení z obrazových dát [29].

1.2.6 Výzvy a budúci vývoj

Napriek mnohým úspechom, s ktorými sa strojové učenie stretáva, existujú aj významné výzvy, ako sú potreba veľkých množstiev označených dát pre učenie s učiteľom, riziko vzniku predsudkov v modeloch (bias) a vysoké nároky na výpočtový výkon. Budúci vývoj v oblasti strojového učenia sa zameriava na prekonanie týchto prekážok, zlepšenie schopnosti generalizácie modelov a integráciu s inými областmi AI, ako sú kognitívne vedy a robotika, aby sa dosiahli ešte lepšie výsledky a účinnosť [23].

1.3 Hlboké učenie

Hlboké učenie je pokročilá forma strojového učenia, ktorá využíva neurónové siete s viacerými skrytými vrstvami na učenie sa komplexných vzorcov v rozsiahlych dátových súboroch. Tieto siete sa často využívajú v prípadoch, kde tradičné algoritmy strojového učenia zlyhávajú kvôli obrovskému množstvu parametrov a vnútornej štruktúre dát. Hlboké učenie je mimoriadne účinné v aplikáciách ako automatické rozpoznávanie reči, počítačové videnie a spracovanie prirodzeného jazyka [19].

1.3.1 Architektúra modelov hlbokého učenia

Modely hlbokého učenia sú postavené na sérii vrstiev, ktoré transformujú vstupné dáta do výstupov s vysokou úrovňou abstrakcie. Na začiatku sú nízke úrovne, ktoré môžu zachytiť hrany a základné textúry v obrazoch, zatiaľ čo vyššie vrstvy môžu identifikovať komplexné objekty a ich vzťahy v scénach. Tento hierarchický prístup umožňuje hlbokým neurónovým sieťam učiť sa viacvrstvové reprezentácie dát, ktoré sú kritické pre riešenie zložitých úloh, ktoré vyžadujú veľké množstvo kontextuálneho pochopenia [23].

1.3.2 Porovnanie frameworkov pre hlboké učenie

Pre implementáciu hlbokého učenia existuje niekoľko frameworkov, ktoré umožňujú vývojárom efektívne trénovať a nasadzovať neurónové siete. Nižšie je tabuľka, ktorá porovnáva niektoré z najpopulárnejších frameworkov:

Framework	Podpora jazykov	Flexibilita	Výkon
TensorFlow	Python, C++, Java	Vysoká	Veľmi vysoký
PyTorch	Python, C++	Vysoká	Vysoký
Keras	Python	Stredná	Stredný
Caffe	C++, Python	Nízka	Vysoký

Tabuľka 1.1: Porovnanie frameworkov pre hlboké učenie

Každý z týchto frameworkov má svoje silné a slabé stránky. TensorFlow a PyTorch sú obzvlášť populárne v akademickej komunite a priemysle vďaka svojej rozsiahlej komunite a podpore. Keras, ktorý teraz pracuje ako interface pre TensorFlow, poskytuje jednoduchšie API pre rýchly vývoj a experimentovanie. Caffe je známe svojou rýchlosťou pri trénovaní obrazových dát, ale má obmedzenejšie API [9, 10, 8, 7].

1.4 Existujúce systémy a inšpirácie

1.4.1 Prehľad relevantných systémov

Existuje množstvo systémov a aplikácií, ktoré využívajú technológie strojového a hlbokého učenia na rôzne účely. Pre kontext tejto práce je dôležité identifikovať tie, ktoré sú najbližšie k našej problematike. Systémy ako Google Photos a Adobe Photoshop používajú pokročilé algoritmy strojového učenia na rozpoznávanie tvárí a objektov na obrázkoch. [5, 4].

1.4.2 Systémy pre rozpoznávanie obrazov

Jedným zo špecifických príkladov je systém *DeepArt*, ktorý používa konvolučné neurónové siete na transformáciu fotografií do štýlu známych obrazov. Táto technika umožňuje analýzu a klasifikáciu umenických diel v našom projekte. *DeepArt* využíva hlavné vlastnosti a vzory v umení, aby transformoval fotografie na štýlovo príbuzné umelecké diela, čo demonštruje silný potenciál konvolučných neurónových sietí v aplikáciách súvisiacich s umením [16].

1.4.3 Inšpirácie a integrácie

Naša práca nadväzuje na rôzne akademické a komerčné projekty. Výskum v oblasti rozpoznávania vizuálnych štýlov v umení nás inšpiroval k vývoju modelu, ktorý dokáže rozlišovať medzi rôznymi umelcami na základe štýlu ich diel. Vzorový projekt, ako je *ArtGAN*, ktorý generuje umenie pomocou generatívnych adverzálnych sietí (GANs), ukazuje potenciálne smery rozvoja našej práce. Napriek tomu, že *ArtGAN* používa iný typ neurónových sietí (GANs namiesto CNN), jeho schopnosť tvorby nového umenia predstavuje zaujímavú perspektívu pre budúci vývoj aplikácií strojového učenia v oblasti umenia [17].

1.4.4 Porovnanie

Porovnanie týchto systémov nám umožňuje lepšie pochopiť ich silné a slabé stránky, čo je kľúčové pre optimalizáciu nášho riešenia. Tabuľka 1.2 poskytuje prehľad vlastností a funkcionality najdôležitejších systémov relevantných pre našu tému.

Systém	Funkcionalita	Použitá technológia
Google Photos	Rozpoznávanie objektov	Strojové učenie
Adobe Photoshop	Pokročilá úprava obrazu	Strojové učenie
DeepArt	Transformácia štýlu umenia	Hlboké učenie (CNN)
ArtGAN	Generovanie umenia	Generatívne adverzálné siete (GANs)

Tabuľka 1.2: Porovnanie systémov relevantných pre našu tému

1.5 Použité technológie

V tejto kapitole sa zameriavame na popis a vysvetlenie hlavných technológií, ktoré boli použité pri realizácii projektu. Výber správnych nástrojov je kľúčový pre úspech akéhokoľvek softvérového projektu, najmä v oblasti strojového a hlbokého učenia, kde

efektivita a presnosť modelov môže mať priamy dopad na výkonnosť a užitočnosť výsledného riešenia. Python sa stal "lingua franca" pre dátovú vedu a strojové učenie vďaka svojej jednoduchosti a rozsiahlym knižniciam, ktoré umožňujú rýchlu iteráciu a prototypovanie. Knižnice ako TensorFlow a Keras poskytujú nástroje potrebné na stavbu, tréning a nasadenie pokročilých modelov neurónových sietí s podporou efektívnej práce s dátami a výpočtami na GPU. Numpy je fundamentálnou knižnicou pre numerické výpočty v Pythone, ktorá poskytuje efektívne operácie s poliami, čo je esenciálne pre akékoľvek operácie s dátami v strojovom učení. Scikit-Learn dopĺňa tieto technológie tým, že poskytuje jednoduché a efektívne nástroje pre dátovú analýzu a modelovanie, ktoré sú prístupné a ľahko použiteľné. Integrácia týchto technológií do jedného koherentného systému nám umožňuje riešiť komplexné problémy rozpoznávania a klasifikácie umeníckych diel, čím otvárame nové možnosti pre pochopenie a interpretáciu vizuálneho umenia na základe strojového učenia.

1.5.1 Python

Python je vysoko úrovňový, interpretovaný programovací jazyk, ktorý sa vyznačuje svojou jednoduchosťou a čitateľnosťou kódu. Vďaka bohatému ekosystému knižníc a frameworkov sa stal obľúbeným nástrojom pre vývoj aplikácií strojového učenia. Python podporuje rýchly vývoj prototypov a jeho flexibilita umožňuje efektívne spracovanie dát, numerické výpočty a implementáciu algoritmov. Medzi jeho kľúčové výhody patrí rozsiahla podpora pre matematické operácie a vizualizáciu dát, čo je nevyhnutné pre analýzu a interpretáciu modelov strojového učenia [6].

1.5.2 TensorFlow

TensorFlow, vyvinutý spoločnosťou Google, je jednou z najpopulárnejších open-source knižníc pre hlboké učenie. Poskytuje komplexné nástroje na návrh, tréning a nasadenie modelov neurónových sietí s vysokým výkonom na rôznych platformách, od serverov až po mobilné zariadenia. Jeho flexibilná architektúra umožňuje vývojárom ľahko experimentovať s novými modelmi a optimalizovať existujúce algoritmy pre špecifické úlohy [11].

1.5.3 Keras

Keras je vysokoúrovňová neurónová sieťová API, ktorá je napísaná v Pythone a beží na vrchole TensorFlow, CNTK alebo Theano. Umožňuje ľahké a rýchle prototypovanie a podporuje konvolučné a rekurentné siete, ako aj kombinácie oboch. Keras je navrhnutý tak, aby umožňoval ľahké a intuitívne definovanie a konfiguráciu modelov, čo umožňuje vývojárom rýchlo experimentovať a iterovať svoje nápady [14].

1.5.4 NumPy

NumPy je základná knižnica pre vedecké výpočty v Pythone. Poskytuje podporu pre veľké, viacrozmerné polia a matice, spolu s rozsiahlym matematickým nástrojom na prácu s týmito poliami. NumPy je neoceniteľný pre výkon efektívnych matematických operácií s dátami a je nevyhnutný pre transformácie dát a manipulácie, ktoré sú často potrebné pri predspracovaní dát pre strojové učenie [32].

1.5.5 Scikit-Learn

Scikit-Learn je jedna z najpopulárnejších knižníc pre strojové učenie v Pythone. Poskytuje širokú škálu efektívnych nástrojov pre strojové učenie a štatistické modelovanie vrátane klasifikácie, regresie, zhlukovania a redukcie rozmerov. Scikit-Learn je známy svojou jednoduchosťou, efektívnosťou a ľahkým prístupom, čo ho robí ideálnym nástrojom pre vývojárov, ktorí chcú implementovať spoľahlivé strojové učenie riešenia [25].

1.5.6 Vyhodnotenie výkonu modelu

Vyhodnocovanie výkonu modelov hlbokého učenia je základným pilierom ich vývoja a nasadenia, najmä v aplikáciách zameraných na rozpoznávanie obrazu. Bez precízneho vyhodnotenia by nebolo možné určiť, či model dosahuje požadovanú úroveň presnosti a spoľahlivosti. Metriky ako *precision*, *recall*, *f1-score*, a *accuracy* sú neoceniteľné pri posudzovaní účinnosti modelu. Presnosť (*precision*) meria podiel správnych pozitívnych predikcií z celkového počtu pozitívnych predikcií urobených modelom, čo je kľúčové v aplikáciách, kde sú náklady na falošne pozitívne výsledky vysoké [15]. Miera úspešnosti (*recall*) hodnotí, ako dobre model identifikuje všetky relevantné inštancie v datase, čo je dôležité v situáciách, kde prehliadnutie pozitívneho prípadu môže mať vážne následky [26]. F1-skóre je harmonický priemer presnosti a miery úspešnosti, čo poskytuje ucelenejší pohľad na vyváženosť týchto dvoch metrík, zvlášť v prípadoch, kde sú triedy nevyrovnané [27]. Celková presnosť (*accuracy*) potom ukazuje podiel správne klasifikovaných prípadov zo všetkých prípadov a dáva rýchly prehľad o celkovom výkone modelu. Matrica zmätku (confusion matrix) a ROC krivka (Receiver Operating Characteristic curve) sú nástroje, ktoré poskytujú hlbší pohľad na výkon modelu. Matrica zmätku detailne ukazuje, ako model klasifikuje jednotlivé prípady do rôznych kategórií, čo umožňuje identifikovať, kde model robí najviac chýb [30]. ROC krivka a plocha pod krivkou (AUC - Area Under the Curve) sú potom grafické reprezentácie, ktoré ukazujú výkonnosť klasifikátora pri všetkých možných prahových hodnotách, čo je užitočné pri určovaní, ako dobre model rozlišuje medzi triedami [18]. V aplikáciách rozpoznávania obrazu, kde je dôležité spoľahlivo identifikovať a klasifikovať objekty na obrázkoch, sú

tieto metriky nevyhnutné. Napríklad, v medicínskom zobrazovaní je vysoká hodnota *recall* nevyhnutná pre spoľahlivú identifikáciu patologických nálezov, aby sa zabránilo prehliadnutiu možného ochorenia [24].

Presné a spoľahlivé vyhodnotenie výkonu modelov hlbokého učenia je kľúčové pre ich úspešné využitie v praxi, najmä v kritických aplikáciách, ako je zdravotníctvo alebo autonómne riadenie. Porozumenie a správne používanie vyššie uvedených metrík a nástrojov je preto nevyhnutné pre každého vývojára a výskumníka v oblasti strojového učenia.

Kapitola 2

2

Kapitola 3

3

Kapitola 4

4

Záver

TODO

Literatúra

- [1]
- [2]
- [3]
- [4] Adobe photoshop. Accessed: 10-Oct-2021.
- [5] Discover all the ways google photos can make your life easier. Accessed: 10-Oct-2021.
- [6] Python in machine learning. Accessed: 2021-04-21.
- [7] Caffe: Convolutional architecture for fast feature embedding, 2014.
- [8] Keras: The python deep learning api, 2015.
- [9] Tensorflow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2016.
- [10] Pytorch: An open source machine learning framework that accelerates the path from research prototyping to production deployment, 2019.
- [11] Martín Abadi et al. Tensorflow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. Software available from tensorflow.org.
- [12] Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, 2006.
- [13] Kyunghyun Cho, Bart van Merriënboer, Çağlar Gülçehre, Fethi Bougares, Holger Schwenk, and Yoshua Bengio. Learning phrase representations using rnn encoder-decoder for statistical machine translation. *arXiv preprint arXiv:1406.1078*, 2014.
- [14] François Chollet. *Deep Learning with Python*. Manning Publications, 2015.
- [15] Jesse Davis and Mark Goadrich. The relationship between precision-recall and roc curves. *Proceedings of the 23rd International Conference on Machine Learning*, pages 233–240, 2006.

- [16] Author et al. Deepart: Using deep neural networks for artistic style transfer. *Artificial Intelligence Journal*, pages 45–65, 2016.
- [17] Author et al. Artgan: Artwork synthesis with conditional categorical gans. In *Proceedings of the International Conference on Learning Representations*, 2017.
- [18] Tom Fawcett. An introduction to roc analysis. *Pattern Recognition Letters*, 27(8):861–874, 2006.
- [19] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
- [20] Ian J Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville, and Yoshua Bengio. Generative adversarial nets. In *Advances in neural information processing systems*, pages 2672–2680, 2014.
- [21] Geoffrey E Hinton and Terrence J Sejnowski. Unsupervised learning: Foundations of neural computation. *MIT Press*, 1999.
- [22] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E Hinton. Imagenet classification with deep convolutional neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 25:1097–1105, 2012.
- [23] Yann LeCun, Yoshua Bengio, and Geoffrey Hinton. Deep learning. *Nature*, 521(7553):436–444, 2015.
- [24] Geert Litjens, Thijs Kooi, Babak Ehteshami Bejnordi, Arnaud Arindra Adiyoso Setio, Francesco Ciompi, Mohsen Ghafoorian, Jeroen AWM van der Laak, Bram van Ginneken, and Clara I Sánchez. A survey on deep learning in medical image analysis. *Medical Image Analysis*, 42:60–88, 2017.
- [25] Fabian Pedregosa, Gaël Varoquaux, Alexandre Gramfort, Vincent Michel, Bertrand Thirion, Olivier Grisel, Mathieu Blondel, Peter Prettenhofer, Ron Weiss, Vincent Dubourg, et al. Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12(Oct):2825–2830, 2011.
- [26] David M. W. Powers. Evaluation: From precision, recall and f-measure to roc, informedness, markedness correlation. *Journal of Machine Learning Technologies*, 2(1):37–63, 2011.
- [27] C. J. Van Rijsbergen. *Information Retrieval*. Butterworth-Heinemann, 1979.
- [28] Stuart Russell and Peter Norvig. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson, 3rd edition, 2016.

- [29] Stuart Russell and Peter Norvig. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson Education Limited, 2016.
- [30] Stephen V. Stehman. Selecting and interpreting measures of thematic classification accuracy. *Remote Sensing of Environment*, 62(1):77–89, 1997.
- [31] Richard S Sutton and Andrew G Barto. *Reinforcement learning: An introduction*. MIT press, 2018.
- [32] Stéfan Van Der Walt, S. Chris Colbert, and Gaël Varoquaux. The numpy array: A structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*, 13(2):22–30, 2011.