

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

INTERAKTÍVNE VYŠETROVANIE PRIEBEHU
ELEMENTÁRNYCH FUNKCIÍ
BAKALÁRSKA PRÁCA

2023
MARTIN LETENAY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

INTERAKTÍVNE VYŠETROVANIE PRIEBEHU
ELEMENTÁRNYCH FUNKCIÍ
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: Aplikovaná informatika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky
Školiteľ: Ing. Ján Komara, PhD

Bratislava, 2023
Martin Letenay



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Martin Letenay
Študijný program: aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Interaktívne vyšetovanie priebehu elementárnych funkcií
Properties of Elementary Functions Interactively

Anotácia: Návrh, vývoj a implementácia editora pre interaktívne vyšetovanie priebehu elementárnych funkcií. Tento nástroj má edukačný charakter a je určený študentom úvodného kurzu matematickej analýzy na našej fakulte. Ako implementačný jazyk je zvolený programovací jazyk Python v prostredí Jupyter Notebook. Výsledná implementácia je publikovaná v niektorej zo slobodných licencií kompatibilnej s GNU GPLv3+.

Cieľ: Návrh, vývoj a implementácia editora pre interaktívne vyšetovanie priebehu elementárnych funkcií vo výpočtovom prostredí IPython/Jupyter.

Literatúra: Cvičenia z matematickej analýzy I / Zbyněk Kubáček, Ján Valášek. Bratislava : Univerzita Komenského, 2009.

Matematická analýza I / Tibor Neubrunn, Jozef Vencko. Bratislava : Univerzita Komenského, 1992.

Data Structures and Algorithms in Python / Michael T. Goodrich, Roberto Tamassia, Michael H. Goldwasser. Wiley, 2013.

Learning IPython for Interactive Computing and Data Visualization / Cyrille Rossant. Packt Publishing, 2nd edition, 2015.

Vedúci: Ing. Ján Komara, PhD.
Katedra: FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tatiana Jajcayová, PhD.
Dátum zadania: 22.09.2022

Dátum schválenia: 26.09.2022
doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie: Tu môžete pod'akovať školiteľovi, prípadne ďalším osobám, ktoré vám s prácou nejako pomohli, poradili, poskytli dáta a podobne.

Abstrakt

Slovenský abstrakt v rozsahu 100-500 slov, jeden odstavec. Abstrakt stručne sumarizuje výsledky práce. Mal by byť pochopiteľný pre bežného informatika. Nemal by teda využívať skratky, termíny alebo označenie zavedené v práci, okrem tých, ktoré sú všeobecne známe.

Kľúčové slová: jedno, druhé, tretie (prípadne štvrté, piate)

Abstract

Abstract in the English language (translation of the abstract in the Slovak language).

Keywords:

Obsah

Úvod	1
1 Východiská práce	2
1.1 Elementárna funkcia	2
1.1.1 Definičný obor funkcie	2
1.1.2 Funkčná hodnota	2
1.1.3 Derivácia funkcie	2
1.1.4 Graf funkcie	2
1.1.5 Priebeh funkcie	3
1.2 Prehľad podobných systémov	4
1.2.1 JEDIT	4
1.2.2 Geogebra graphing calculator	6
Záver	7
Príloha A	9
Príloha B	10

Zoznam obrázkov

1	Základný graf	4
2	Analýza vlastností funkcie z grafu	5
3	Textové výstupy z editora	5

Zoznam tabuliek

Úvod

citácie [1, 2, 3, 4, 5, 6]

1 Východiská práce

Táto kapitola obsahuje základný popis systému, vysvetľuje základné pojmy a predstavuje základné vlastnosti systému. Taktiež krátko popisuje iné dostupné systémy a programy s podobnou funkcionlitou.

1.1 Elementárna funkcia

Elementárna funkcia je funkcia jednej premennej ktorá je zložená z konečného počtu súčtov, súčinov, rozdielov, podielov alebo zložení polynomiálnych, racionálnych, trigonometrických, hyperbolických, a exponenciálnych funkcií.

1.1.1 Definičný obor funkcie

Nech f je elementárna funkcia, a nech X, Y sú podmnožinami reálnych čísel (\mathbb{R}). Funkcia f je zobrazenie $f : X \rightarrow Y$. Definičný obor sú také prvky z množiny X pre ktoré je funkcia definovaná.

1.1.2 Funkčná hodnota

Hodnota ktorú funkcia nadobúda v určitom bode definičného oboru sa nazýva funkčná hodnota. Označuje sa $f(x)$.

1.1.3 Derivácia funkcie

Derivácia funkcie vyjadruje zmenu funkčnej hodnoty v pomere so zmenou hodnoty nezávislej premennej (argumentu) funkcie. Hodnota derivácie funkcie v nejakom zvolenom bode určuje smernicu dotýčnice ku grafu funkcie v danom bode. Označuje sa $f'(x)$

1.1.4 Graf funkcie

Graf funkcie je množina usporiadaných dvojíc (x, y) kde $f(x) = y$. Tieto dvojice sú zobrazené v karteziánskej súradnicovej sústave.

1.1.5 Priebek funkcie

Pri skúmaní priebehu funkcie môžeme pozorovať viaceré vlastnosti funkcie na danom intervale. Tieto vlastnosti sa najlepšie pozorujú z grafu.

Vybrané vlastnosti ktoré bude editor zobrazovať

- Nulové body
- Intervaly monotónnosti
- Intervaly konkávnosti a konvexnosti
- Inflexné body

Nulové body Nulové body funkcie sú body kde sa nachádzajú priesečníky s osou X , teda kde $f(x) = 0$

Intervaly monotónnosti Funkcia môže byť monotónna v rôznych prípadoch

Rastúca funkcia Funkcia je rastúca na nejakom intervale M ktorý je podmnožninou definičného oboru ak pre všetky prvky x_1, x_2 z intervalu M platí podmienka: Ak je x_1 menšie ako x_2 potom je $f(x_1)$ menšie ako $f(x_2)$

$$M \subseteq D(f)$$

$$\forall x_1, x_2 \in M | x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Klesajúca funkcia Funkcia je rastúca na nejakom intervale M ktorý je podmnožninou definičného oboru ak pre všetky prvky x_1, x_2 z intervalu M platí podmienka: Ak je x_1 menšie ako x_2 potom je $f(x_1)$ väčšie ako $f(x_2)$

$$M \subseteq D(f)$$

$$\forall x_1, x_2 \in M | x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Intervaly konkávnosti a konvexnosti

Konkávna funkcia Funkcia je konkávna na nejakom intervale M ktorý je podmnožninou definičného oboru ak pre ľubovoľné 2 prvky x_1, x_2 z intervalu M platí podmienka:

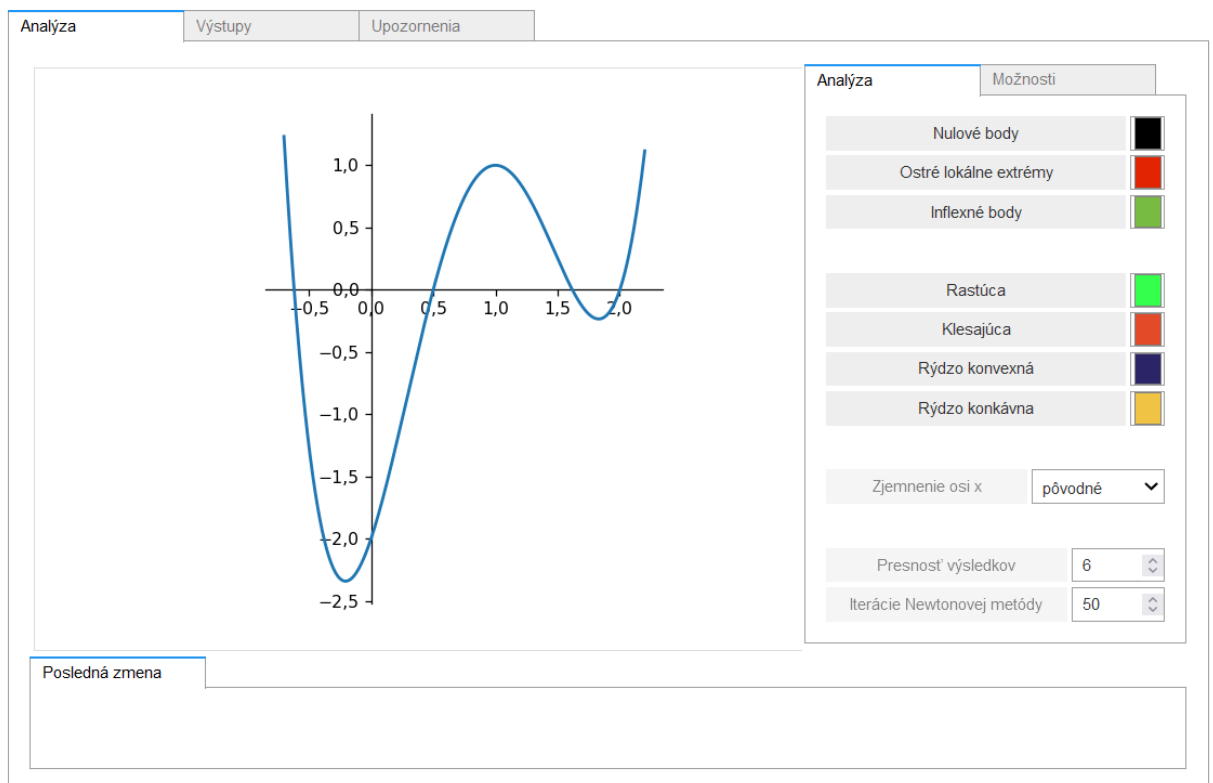
$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \text{ pre } \lambda \in (0, 1) \text{ a } x_1 \neq x_2$$

Inflexné body Inflexné body sú body kde sa funkcia mení z konkávnej na konvexnú alebo opačne-

1.2 Prehľad podobných systémov

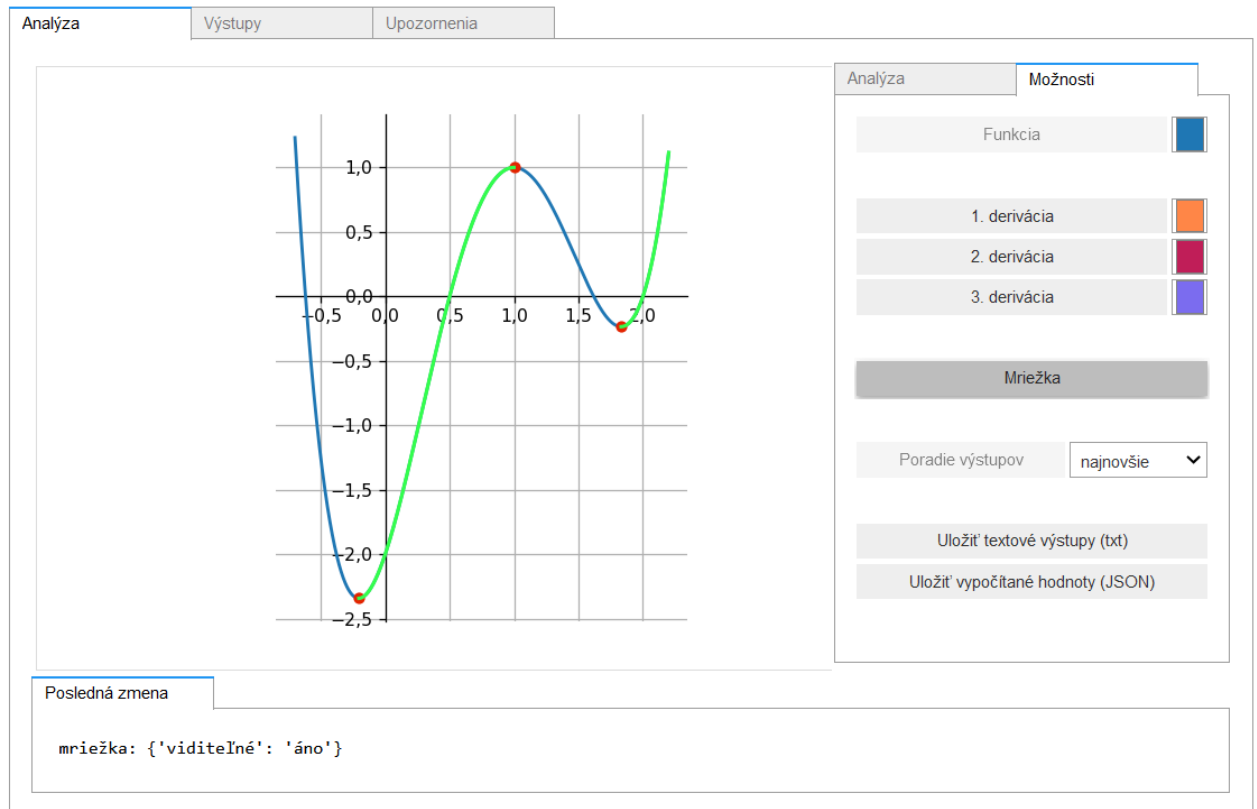
1.2.1 JEDIT

JEDIT je knižnica vytvorená bývalým študentom FMFI Jurajom Vetrákom. Knižnica je integrovaná priamo do prostredia Jupyter Notebook, ktoré sa používa na hodinách matematickej analýzy. Po spustení sa zobrazí súradnicová sústava a základný graf funkcie. Má jednoduché používateľské rohranie a ovláda sa pomocou tlačidiel ktoré spúšťajú zobrazovanie jednotlivých vlastností funkcie. Výhodou je možnosť upraviť farbu zobrazenia vlastností podľa potrieb užívateľa.



Obr. 1: Základný graf

Ak užívateľ zvolí zobrazenie vlastnosti celý graf sa prekreslí a do malej záložky pod grafom sa vypíše pois poslednej vykonanej aktivity. Tiež je možné meniť jemnosť osi x alebo zobrazovať derivácie funkcie alebo zobraziť ku grafu mriežku pre lepšie odčítanie bodov.



Obr. 2: Analýza vlastností funkcie z grafu

JEdit tiež poskytuje možnosť textového zobrazenia vypočítaných hodnôt pre poktreby ďaľšieho využitia, uloženie hodnôt do súboru. Avšak pri ukladaní do súboru sa vyskútujú chyby.

```

[03.04.2023 17:35:48]
popis akcie: prvá derivácia
viditeľné: áno
[03.04.2023 13:06:36]
popis akcie: mriežka
viditeľné: áno
[03.04.2023 12:59:48]
popis akcie: rastúca
viditeľné: áno
intervaly_x: [
  (-0,204, 0,999),
  (1,831, 2,2)
]
[03.04.2023 12:59:44]
popis akcie: extrém
viditeľné: áno
ostré_lokálne_extremy_v_bodoch: [
  -0,205,
  1,0,
  1,83
]
ostré_lokálne_minimá_v_bodoch: [
  -0,205,
  1,83
]
ostré_lokálne_maximá_v_bodoch: [
  1,0
]
[03.04.2023 10:54:36]
popis akcie: editor spustený

```

Obr. 3: Textové výstupy z editora

1.2.2 Geogebra graphing calculator

Geogebra je jeden z mnohých online nástrojov na kreslenie grafov. Neponúka však všetko čo napríklad ponúka JEDIT. Vie zobrazit' extrémny a nulové body a napríklad zostrojit' dotyčnicu v nejakom bode. Nedajú sa ale napríklad nastaviť intervaly a možnosti prispôsobovania grafu sú skryté medzi nastaveniami a vyžadujú množstvo klikania.

Záver

Literatúra

- [1] Jozef Eliáš. *Matematika (Úvod do numerickej analýzy)*. Slovenská vysoká škola technická v Bratislave, 1974.
- [2] Michael T. Goodrich, Roberto Tamassia and Michael H. Goldwasser. *Data Structures and Algorithms in Python*. Wiley, 2013.
- [3] Zbyněk Kubáček and Ján Valášek. *Cvičenia z matematickej analýzy I*. Bratislava : Univerzita Komenského, 2009.
- [4] Tibor Neubrunn and Jozef Vencko. *Matematická analýza I*. Bratislava : Univerzita Komenského, 1992.
- [5] Cyrille Rossant. *Learning IPython for Interactive Computing and Data Visualization*. Packt Publishing, 2nd edition, 2015.
- [6] Rudolf Blaško. *Matematická analýza I*. EDIS, 2009.

Príloha A: obsah elektronickej prílohy

Príloha B: Používateľská príručka