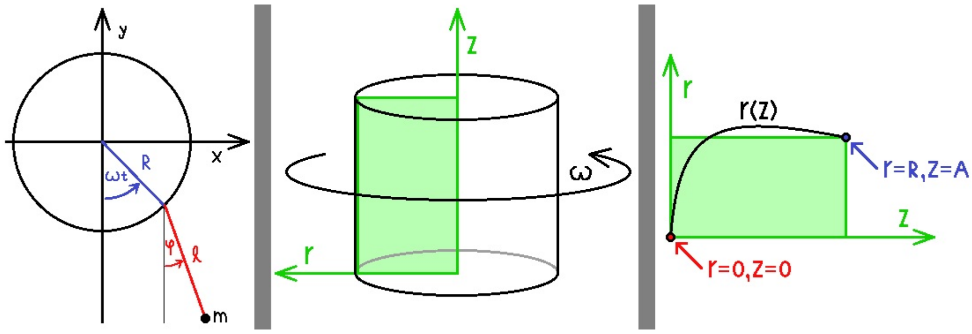
Domáca Úloha na body za semeter # 3

odovzdať (riešenie poslať na e-mail) najneskôr vo štvrtok 29. októbra 2020



1. **[1 b]** Závažie s hmotnosťou m je zavesené na (bezhmotnej) paličke dĺžky l, ktorej druhý koniec sa pohybuje po kružnici s polomerom R s uhlovou frekvenciou ω. Všetko prebieha v rovine x-y a v beztiaži (bez tiažového zrýchlenia) tak ako na prvom obrázku. Väzba je preto daná vzťahom
$$(x - R\sin\omega t)^2 + (y + R\cos\omega t)^2 = l^2$$
a Lagranžián je daný iba kinetickou energiou,
$$L = T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right).$$
Úlohou je ukázať, že ak si za zovšeobecnenú súradnicu vyberieme uhol φ tak ako na obrázku, potom Lagrangeove rovnice dávajú pohybovú rovnicu
$$\ddot{\varphi} + \frac{R\omega^2}{l}\sin(\varphi - \omega t) = 0.$$

2. **[1,5 b]** Najprv pochopiť (ideálne doriešiť) príklad $\boxed{4.4}$ v texte "rozšírený sylabus" podľa návodu tam uvedeného. Úlohou je podobným postupom nájsť brachystochronu v rotujúcej sústave v beztiaži (rotujúci cylinder vo vesmíre) takú, ktorá pri štarte s nulovou rýchlosťou začína na osi rotácie[1] a svoj pohyb končí v polomere R, pričom pozdĺž osi rotácie prejde vzdialenosť A, viď obrázky 2 a 3. Navrhovaný postup:

   (a) Napísať účinok pre funkciu $r(z)$: infinitezimálny kúsok brachystochrony má dĺžku $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}dz$; rýchlosť pohybu hmotného bodu po brachystochrone je $v = \omega r$, čo sa dá odvodiť zo zákona zachovania energie, $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$, kde potenciálna energia v rotujúcej sústave je $U = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, a z fixovania energie $E = 0$ z okrajovej podmienky na začiatku pohybu, $r = 0$, $z = 0$;

[1] V skutočnosti iba veľmi blízko tejto osi, alebo s veľmi malou rýchlosťou, aby sa pohyb mohol vôbec začať, viď druhá (dlhá) poznámka pod čiarou.

čas pohybu po brachystochrone je potom

$$t = \int dt = \int \frac{dl}{v} = \int\limits_0^A \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\omega r} dz,$$

takže to, čo matematicky hrá úlohu Lagranžiánu, je

$$L[z, r, r'] = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\omega r}.$$

(b) Využiť nezávislosť Lagranžiánu od z, teda použiť rovnicu

$$r' \frac{\partial L}{\partial r'} - L = K = \text{konšt.}$$

(c) Získanú rovnicu separovať a po preintegrovaní ukázať, že riešenie spĺňajúce zadané okrajové podmienky je

$$(z-c)^2 + r^2 = c^2, \quad \text{kde} \quad c = \frac{R^2 + A^2}{2A},$$

(kružnica).[2]

---

[2]Ak tento výsledok dosadíme do integrálu pre výpočet času pohybu po brachystochrone, dostaneme

$$t = \frac{c^2}{\omega} \int\limits_0^A \frac{dz}{z\,(2c-z)}.$$

Funkcia, ktorú tu integrujeme, má póly v $z = 0$ a $z = 2c = \frac{R^2}{A} + A > A$, takže integrál tejto funkcie na intervale $z \in \langle 0, A \rangle$ diverguje logaritmicky na dolnej hranici integrovania (na začiatku pohybu).

Dôvod je ten, že pri uvažovaných okrajových podmienkach pohyb po brachystochrone ani len nezačne a hmotný bod zostane po celý čas na osi otáčania. (Nevie sa rozhodnúť, ktorým smerom vyraziť, pretože všetky smery sú rovnocenné.) Na započatie pohybu potrebujeme malý impulz alebo musí začať trochu mimo osi rotácie, takže okrajovú podmienku pre začiatok pohybu treba modifikovať, čo vedie na modifikáciu Lagranžiánu:

$$r = 0, \quad v = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\omega^2 r^2 + \varepsilon^2} \quad \Longrightarrow \quad L[z, r, r'] = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\sqrt{\omega^2 r^2 + \varepsilon^2}}, \quad \text{alebo}$$

$$r = \eta, \quad v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \omega \sqrt{r^2 - \eta^2} \quad \Longrightarrow \quad L[z, r, r'] = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{\omega \sqrt{r^2 - \eta^2}},$$

kde ε a η sú malé veličiny.

V oboch prípadoch ide o inú a oveľa ťažšiu úlohu ako tú, ktorú ste vyriešili. Tieto úlohy je možné vyriešiť iba v kvaratúrach cez eliptické integrály. Napríklad v prvom prípade dostaneme

$$\int\limits_0^{r(z)} \frac{|K| \sqrt{\omega^2 r^2 + \varepsilon^2}}{\sqrt{1 - K^2 \left(\omega^2 r^2 + \varepsilon^2\right)}} dr = z$$

a celkový čas pohybu po brachystochrone sa dá počítať ako

$$t = \int\limits_0^R \frac{dr}{\sqrt{\omega^2 r^2 + \varepsilon^2} \sqrt{1 - K^2 \left(\omega^2 r^2 + \varepsilon^2\right)}},$$

čo je už integrál, ktorý na dolnej hranici integrovania (na začiatku pohybu) konverguje. Pre veľmi malé ε a η je však výsledok úlohy, ktorú ste vyriešili (brachystochrona v tvare kružnice), blízky k výsledkom úloh s modifikovanými (realistickejšími) Lagranžiánmi.