

1. RELÁCIA EKVIVALENCIE

Binárna relácia R na množine M je podmnožina kartézského súčinu $M \times M$ (t.j. $R \subset M \times M$). Ak $(a, b) \in R$, píšeme často tiež $a R b$.

Binárna relácia $\sim$ sa nazýva *ekvivalenciou* (tiež *reláciou ekvivalencie*), ak je

- reflexívna: $a \sim a$ pre všetky $a \in M$,
- symetrická: ak $a \sim b$, potom $b \sim a$ pre všetky $a, b \in M$,
- a tranzitívna: ak $a \sim b$ a $b \sim c$, potom $a \sim c$ pre všetky $a, b, c \in M$.

Ak je na množine M definovaná relácia ekvivalencie $\sim$, potom pre ľubovoľné $a \in M$ budeme označovať

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$$

a nazývať túto množinu *triedou ekvivalencie*.

1. Ktorú z troch vlastností „reflexívnosť“, „symetria“ a „tranzitívnosť“ majú nasledovné relácie medzi celými číslami:

- $a \geq b$.
- $a > b$,
- $a \mid b$.
- $a^2 + a = b^2 + b$.
- $a < |b|$.

2. To isté zadanie ako v predchádzajúcej úlohe pre relácie na množine všetkých ľudí:

- „Je otcom”,
- „je bratom”,
- „je strýkom”,
- „je potomkom”.

* 3. Hovoríme, že relácia R je *cyklická*, ak $a R b$ a $b R c$ implikuje $c R a$. Ukážte, že relácia je reflexívna a cyklická práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

* 4. Kde je chyba v nasledujúcom „dôkaze“, že každá symetrická a tranzitívna relácia R je aj reflexívna?

„Podľa zákona symetrie $a R b$ implikuje $b R a$, a na základe tranzitívnosti $a R b, b R a$ implikuje $a R a$.”

5. Nech je na množine M definovaná relácia ekvivalencie $\sim$.

- Ukážte, že ak $a \sim b$, potom $[a] = [b]$.
- Ukážte, že ak $a \not\sim b$, potom $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Čiže triedy ekvivalencie sú rozkladom množiny M na disjunktné podmnožiny.

6. Nech $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ je rozklad množiny M na disjunktné podmnožiny, t.j. každý prvok množinu M patrí práve jednej z množín M_α . Overte, že relácia $\sim$ definovaná nasledovne:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a, b \in M_\alpha \text{ pre nejaké } \alpha \in \mathcal{A}$$

je reláciou ekvivalencie.

7. $\mathcal{L}$ Nech $\sim$ je relácia na množine úsečiek v $\mathbb{R}^2$ definovaná

$$AB \sim CD \quad \text{práve vtedy, keď} \quad |AB| = |CD|.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie?

8. $\mathfrak{H}$ Na množine $\mathbb{R}^2$ (body reálnej roviny) zavedme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_1 - b_1 = 0.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

9. ☞ Na množine $\mathbb{R}^2$ (body reálnej roviny) zavedme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

10. ✎ Ukážte, že relácia $\sim$ na množine orientovaných úsečiek definovaná

$$AB \sim CD \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \mathcal{S}(A, D) = \mathcal{S}(C, B)$$

je reláciou ekvivalencie.

11. ☞ Na množine $\mathbb{Z}$ celých čísel uvažujme nasledovnú reláciu:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad 3|(b - a).$$

Je takto definovaná relácia ekvivalenciou? Svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak ide o ekvivalenciu, čo sú triedy ekvivalencie?

12. ✎ Na množine $\mathbb{R}^2$ (body reálnej roviny) zavedme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

13. ☞ Na množine $\mathbb{R}$ reálnych čísel zavedme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad |a - b| < 1.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

*** 14.** Na množine $\mathbb{Z}$ celých čísel zavedme reláciu $\sim$ nasledovne: pre $x, y \in \mathbb{Z}$ bude $x \sim y$ práve vtedy, keď $7|(x^3 - y^3)$. Ukážte, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie. Aký rozklad množiny $\mathbb{Z}$ predstavuje?

2. OPAKOVANIE ANALYTICKEJ GEOMETRIE

15. ✎ Úlohou je nájsť ťažisko trojuholníka v rovine.

- *Ťažnica* je úsečka spájajúca vrchol trojuholníka a stred protilahlej strany.
- Vieme, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jedinom bode, ktorý nazývame *ťažiskom*.
- Vieme, že ťažisko delí ťažnicu v pomere 1 : 2.

Nájdite ťažisko (čiže uveďte jeho súradnice)

- (i) v trojuholníku ABC , kde $A = (-2, -2)$, $B = (4, 0)$, $C = (-5, 2)$,
- (ii) v trojuholníku ABC , kde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$.

(Dôležité je zadanie (b). Zadanie (a) je len pomôcka na „ohmatanie si“ problému, riešiť ho nemusíte, ak si trúfate rovno odvodiť vzorec v (b).)

16. ☒ Dané sú vrcholy $A = (1, 3, 5)$, $B = (-1, 2, 1)$ trojuholníka ABC a jeho ťažisko $T = (1, 0, 1)$. Nájdite vrchol C .

17. Dané sú vrcholy $A = (7, -2)$, $B = (-2, 1)$ rovnobežníka $ABCD$. Nájdite súradnice bodov C, D , ak viete, že uhlopriečky rovnobežníka sú rovnobežné so súradnicovými osami.

18. ☒ Dané sú vrcholy $A = (1, 3, 5)$, $B = (-1, 2, 1)$ rovnobežníka $ABCD$ a priesečník jeho uhlopriečok $S = (1, 0, 1)$. Nájdite súradnice bodov C, D .

19. ✎ Nájdite obraz bodu A v súmernosti podľa S

- (i) keď $S = (0, 0)$, $A = (a_1, a_2)$,
- (ii) keď $S = (s_1, s_2)$, $A = (a_1, a_2)$ (môžte si pomôcť predpisom pre stred úsečky, viď úloha 128)

20. ✎ Analyticky (t.j. pomocou súradníc) ukážte, že zložením dvoch stredových súmerností je posunutie. (Využijete zrejme príklad 19.)

21. ☒ Ukážte, že každé posunutie sa dá napísať ako zloženie dvoch stredových súmerností. Presnejšie, pre ľubovoľný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ nájdite body S_1 a S_2 tak, že $t = f_2 \circ f_1$, kde f_1 je stredová súmernosť so stredom S_1 , f_2 je stredová súmernosť so stredom S_2 a t je posunutie v smere vektora $\mathbf{u}$. (Pozor, body S_1, S_2 nie sú určené jednoznačne.)

22. ✎ Popíšte pomocou súradníc osovú súmernosť v prípade, že os súmernosti je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou.

3. BODOVO-VEKTOROVÝ KALKULUS

23. ✎ Daný je rovnobežník $ABCD$. Vyjadrite vektor $M - A$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = D - A$, ak

- (a) $M = B$,
- (b) $M = C$,
- (c) M je priesečník uhlopriečok rovnobežníka,
- (d) M je stred strany AD ,
- (e) M je stred strany CD ,
- (f) M rozdeľuje stranu BC v pomere 2:1.

24. ☒ Daný je rovnobežník $ABCD$. Vyjadrite vektor

- (a) $S - B$, kde S je stred CD ,
- (b) $T - C$, kde T je stred AB ,

ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = D - A$.

25. Nech S je stred rovnobežníka $ABCD$ a nech $\mathbf{a} = C - B$, $\mathbf{b} = A - D$, $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - D$, $\mathbf{w} = D - A$.

- (a) Zistite, aký je vzťah medzi vektormi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
- (b) Určte: $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{a} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{a}$, $\mathbf{u} - (-\mathbf{v})$.
- (c) Vyjadrite vektory $S - A$, $B - S$, $D - S$ ako lineárne kombinácie vektorov $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$.

26. ☒ Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Vyjadrite zadané vektory ako lineárne kombinácie vektorov $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = F - A$.

- (a) $C - B$, (c) $E - F$, (e) $E - B$, (g) $D - F$.
- (b) $D - C$, (d) $E - D$, (f) $E - C$,

27. ☒ V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ vyjadrite pomocou bodu A a vektorov $\mathbf{e}_1 = B - A$, $\mathbf{e}_2 = C - B$ všetky vrcholy šesťuholníka.

28. ☒ Nech S je priesečník uhlopriečok štvorca $ABCD$. Vyjadrite vrcholy a stredy strán štvorca ako kombinácie bodu S a vektorov $A - S$ a $B - S$.

29. Nech $A = (1, 3)$, $B = (-1, 5)$, $\mathbf{u} = (2, -5)$, $\mathbf{v} = (3, 1)$. Rozhodnite, či napísaný objekt je bod alebo vektor, a aj je, určte jeho súradnice:

- (a) $\frac{1}{2}(B - A) - \mathbf{v}$,
- (b) $(B + \mathbf{v}) - (A + \mathbf{u})$,
- (c) $(B - A) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$,
- (d) $A + \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

30. ✎ Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník. Rozhodnite, či ide o vektor alebo bod a zakreslite:

- (a) $A + 2(E - F)$,
- (b) $E + B - C$,
- (c) $C + E - D - F$,
- (d) $E - B - A$,
- (e) $F + 2(C - B) + (C - D)$,
- (f) $(D - F) - (C - B)$,
- (g) $3A - 2B + 2D - 2F$,
- (h) $2A - \frac{1}{2}D + \frac{3}{2}E - 2F$.

31. ✎ Dané sú body A, B, C, D . Nech $M = \mathcal{S}(A, B)$ a $N = \mathcal{S}(C, D)$. Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$.

32. Vyjadrite daný bod alebo vektor ako afinnú kombináciu bodov:

- (a) $A + 2(B - A) + 3(A - C)$,
- (b) $(A + 2(B - A)) - (B + 2(C - A))$.

33. ✎ Vyjadrite body P_i ako afinné kombinácie bodov $A = (2, 1)$, $B = (-1, 2)$:

- (a) $P_1 = (8, -1)$,
- (b) $P_2 = (-7, 4)$,
- (c) $P_3 = (4, 7)$.

Body načrtnite. Vyslovte hypotézu o riešiteľnosti úlohy.

34. ✎ Nech $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$, nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$. Dokážte, že ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ ($\lambda \in k$), potom pre ľubovoľné body A, B platí

$$\lambda_1(P_1 - A) + \dots + \lambda_n(P_n - A) = \lambda_1(P_1 - B) + \dots + \lambda_n(P_n - B).$$

(Ide o dôkaz korektnosti definície afinnej kombinácie bodov v prípade, že súčet koeficientov je 0.)

35. ☐ Nech $\mathcal{S}(A, B) = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ je stred úsečky AB . Dokážte, že pre všetky body A, B, C, D platí

$$B - A = D - C \text{ práve vtedy, keď } \mathcal{S}(A, D) = \mathcal{S}(B, C).$$

36. ☐ Body D, E sú stredy strán BC, CA trojuholníka ABC . Dokážte, že $D - E = \frac{1}{2}(B - A)$.

37. ☐ Body E, F nech sú v tomto poradí stredmi základní AB, CD lichobežníka $ABCD$. Vyjadrite vektor $F - E$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = B - A$ a $\mathbf{b} = D - A$.

38. ☐ Nech $M = A + k(B - A)$, $N = D + k(C - D)$, $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$.
- (b) Dokážte: ak body A, B, C, D neležia v rovine, tak priamka $\overleftrightarrow{MN}$ je rovnobežná s rovinou $\overleftrightarrow{ADE}$, kde $E = A + (C - B)$.

39. ☐ Pre bod M v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$ platí $(A - M) + 2(B - M) + 3(C - M) = \mathbf{0}$.

- (a) Vyjadrite vektor $M - A$ ako lineárnu kombináciu vektorov $B - A$ a $C - A$.
- (b) Leží bod M v trojuholníku ABC ?

40. ☐ Na hranách štvorstena $ABCD$ nájdite všetky také body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, že $L - K = M - N$.

41. Majme rovnobežník, ktorého jeden vrchol je v začiatku súradníc, ďalšie dva k nemu susedné vrcholy sú (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) . Aké sú súradnice posledného vrchola rovnobežníka?

42. Nech jeden vrchol rovnobežnostena je v začiatku súradníc, tri k nemu susedné vrcholy sú (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) a (x_3, y_3, z_3) . Aké sú súradnice zvyšných štyroch vrcholov rovnobežnostena?

43. ✎ Určte vrcholy trojuholníka ABC , ak body $D = (1, 2)$, $E = (3, 4)$, $F = (5, -1)$ sú stredy jeho strán BC, CA, AB .

4. AFINNÁ SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA

44. V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ vyjadrite súradnice všetkých jeho vrcholov v súradnicovej sústave určenej repérom $(B, C - B, A - B)$.

45. S pomocou náčrtku napíšte súradnice bodu $A = (2, 3)$ v súradnicovej sústave $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, keď

(a) $O = (4, -1), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1),$

(b) $O = (0, 0), \mathbf{e}_1 = (1, 1), \mathbf{e}_2 = (0, -1),$

(c) $O = (2, 1), \mathbf{e}_1 = (1, 1), \mathbf{e}_2 = (-1, 0).$

46. ☞ V rovine je daný trojuholník ABC a body $D = \mathcal{S}(B, C), E = \mathcal{S}(A, C), F = \mathcal{S}(A, B)$. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka v afinnej súradnicovej sústave $(F, E - F, D - F)$.

47. V priestore je daný rovnobežnosten $ABCD A' B' C' D'$. Nájdite súradnice vrcholov a stredov stenových rovnobežníkov v afinnej súradnicovej sústave $(A, B - A, D - A, A' - A)$.

48. ☞ V priestore je daný štvorsten $OABC$. Zdôvodnite, že

$$(O, A - O, B - O, C - O)$$

je afinná súradnicová sústava v tomto priestore, a zistite, aké súradnice majú ťažiská stenových trojuholníkov v tejto súradnicovej sústave.

49. ☞ V rovine je daný lichobežník $ABCD$, v ktorom platí $B - A = -\frac{5}{3}(D - C)$. V afinnej súradnicovej sústave $(A, C - A, D - B)$ nájdite súradnice vrcholov a stredov strán lichobežníka.

50. Aké je geometrické miesto bodov priestoru, ktorých jedna súradnica je daná a ďalšie dve sú ľubovoľné?

51. Aké je geometrické miesto bodov priestoru, ktorých dve súradnice sú dané a tretia je ľubovoľná?

5. AFINNÉ ZOBRAZENIA

52. $\mathcal{Z}$ Uvažujme v reálnej rovine osovú súmernosť, ktorej os súmernosti je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou (úloha 22). Ukážte, že toto zobrazenie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je afinné.

53. $\mathcal{Z}$ Nech $P \in \mathbb{E}^n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ nech každému bodu $X \in \mathbb{E}^n$ priradí stred úsečky PX . Zobrazenie si načrtnite pre $n = 2$ (zakreslite obrazy niekoľkých bodov). Zistite, či je f afinné zobrazenie.

54. $\mathcal{Z}$ Nech $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je zobrazenie, ktoré bodu A so súradnicami (a_1, a_2) priradí bod $A' = (a_1, a_1 a_2)$. Zobrazenie si načrtnite (zakreslite obrazy niekoľkých bodov). Zistite, či je f afinné zobrazenie.

55. $\mathcal{Z}$ Nech $P \in \mathbb{A}^n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ nech každému bodu $X \in \mathbb{A}^n$ priradí bod P . Zistite, či je f afinné zobrazenie.

56. $\mathcal{Z}$ Afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ zobrazuje body $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(1, 4)$ do bodov $(1, 6)$, $(1, 9)$, $(3, 1)$ v tomto poradí. Kam sa zobrazí bod $(5, 7)$? Ktorý bod sa zobrazí sám na seba?

57. $\mathcal{A}$ Dané je afinné zobrazenie

$$\begin{aligned} f: x' &= 2x + 3y + 5, \\ y' &= 4x - 3y - 2. \end{aligned}$$

Do akých bodov sa zobrazia body $(0, 0)$, $(5, 3)$, $(-1, 4)$? Čo je obrazom súradnicových osí?

58. $\mathcal{A}$ Dané je afinné zobrazenie

$$\begin{aligned} f: x' &= 3x + y - 6, \\ y' &= x + y + 1. \end{aligned}$$

Ktoré body sa zobrazia do bodov $(9, 8)$ a $(-6, 1)$?

59. $\mathcal{Z}$ Dané je afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(x, y) \mapsto (x', y', z')$, kde

$$\begin{aligned} x' &= x - y + 1, \\ y' &= x + y, \\ z' &= y + 2. \end{aligned}$$

Určte obraz začiatku $\mathbb{E}^2$.

60. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré

- (a) $\mathcal{Z}$ zobrazuje bod $(6, -2)$ na bod $(1, 1)$ a vektory $(2, 1)$, $(-1, 2)$ do vektorov $(4, 2)$ a $(-3, 6)$
- (b) $\mathcal{A}$ zobrazuje každý z bodov $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ na seba a $(0, 0, 1)$ na $(1, 1, 1)$.

61. $\mathcal{A}$ Vrcholy štvorstena $ABCD$ sú v bodoch $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré ponechá bod A na mieste a stredy hrán AB , AC , AD zobrazuje do stredov protíhlých hrán.

62. $\mathcal{Z}$ Dané je afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$, kde

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 2y + z + 1, \\ y' &= 2x + 3y - 3z, \\ z' &= y - z + 4. \end{aligned}$$

Zistite, či je f injektívne.

63. 

- (a) Vo vhodnej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie (napr. maticou) afinného zobrazenia $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktoré vrcholom trojuholníka ABC priradí stredy protilahlých strán.
- (b) V tej istej súradnicovej sústave napíšte vyjadrenie afinného zobrazenia g , ktoré zobrazuje body A, B, C v tomto poradí do bodov A, B, T , kde T je ťažisko $\triangle ABC$.
- (c) Určte analytické vyjadrenia zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} a g^{-1} .

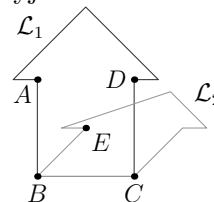
64.   Ukážte, že afinné zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je injektívne práve vtedy, keď je asociované lineárne zobrazenie $Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ injektívne.

(Obe implikácie sa dobre ukazujú nepriamo: predpokladajte, že f nie je injektívne, a skúste nájsť nenulový vektor vo $V(\mathbb{A}_1)$, ktorý sa zobrazením Df zobrazí na nulový. Pre druhú implikáciu: ak Df nie je injektívne, skúste nájsť dva rôzne body v $\mathbb{A}_1$, ktoré majú v zobrazení f ten istý obraz.)

65. 

Vhodne si zvolte súradnicovú sústavu a nájdite analytické vyjadrenie zobrazenia, ktoré lomenú čiaru $\mathcal{L}_1$ zobrazí na lomenú čiaru $\mathcal{L}_2$ (viď obrázok: body A, B, C, D sú vrcholmi štvorca a bod E je jeho stredom, ide o uzavreté lomené čiary: úsečka BC je spoločná pre obe).

Koľko takých zobrazení existuje?



66.  Zapište analyticky (napríklad maticou) otočenie v $\mathbb{E}^2$ okolo začiatku súradnicovej sústavy, ktoré bod so súradnicami $(5, 0)$ otočí do bodu so súradnicami $(4, 3)$ (teda body $(5, 0)$, $(0, 0)$ a $(4, 3)$ určujú uhol otočenia).

(Môžte predpokladať, že otočenie je afinné zobrazenie a pomôcť si dokázaným tvrdením, že afinné zobrazenie je dané obrazmi troch nekolineárnych bodov.)

67.  Zapište analyticky otočenie v $\mathbb{E}^2$ o uhol φ okolo začiatku súradnicovej sústavy.

68.  Zapište analyticky otočenie v $\mathbb{E}^2$ okolo bodu $S = (s_1, s_2)$. Uhol otočenia si zvolte podľa vlastných preferencií buď všeobecne φ (ako v úlohe 67) alebo konkrétne uhol z úlohy 66.

69. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$ sú dva ľubovoľné navzájom rôzne body. Nech $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je zobrazenie, ktoré bodu X priradí bod

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}X.$$

Zistite, či f je afinné zobrazenie. Ako by ste interpretovali toto zobrazenie?

70. V rovine $\mathbb{E}^2$ je daný trojuholník BCD . Pre zobrazenie f platí:

$$f(B) = C, \quad f(C) = D, \quad f(D) = B.$$

Všetky ostatné body sú samodružné (t.j. zobrazia sa na seba). Je f afinné zobrazenie?

71.  Nájdite analytické vyjadrenie afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje

(a) body

$$\begin{aligned}(1, 0) &\mapsto (2, 3), \\ (0, 2) &\mapsto (-1, 4), \\ (-3, 0) &\mapsto (-2, -1).\end{aligned}$$

(b) bod $(4, 3)$ do bodu $(0, 0)$ a vektory

$$\begin{aligned}(1, 1) &\mapsto (3, 1), \\ (0, -2) &\mapsto (4, 0).\end{aligned}$$

72.  Afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ je vo vhodnej súradnicovej sústave dané predpisom

$$\begin{aligned}f: x_1 &= x_1 - x_2 + 1, \\ x_2 &= x_1 + x_2, \\ x_3 &= x_2 + 2.\end{aligned}$$

Určte obraz začiatku v $\mathbb{E}^2$, vzor začiatku v $\mathbb{E}^3$ a zistite, či je zobrazenie injektívne a surjektívne.

73. Nájdite všetky body $X = (x, y, z)$, ktoré sa v zobrazení $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^2$

$$\begin{aligned}x' &= 2x - z + 1, \\ y' &= x + y\end{aligned}$$

zobrazia do bodu $M = (4, 3)$.

74.  Nájdite afinné zobrazenie, ktoré

- (a) zobrazuje bod $(6, -2)$ na bod $(1, 1)$ a vektory $(2, 1)$, $(-1, 2)$ do vektorov $(4, 2)$ a $(-3, 6)$,
- (b) zobrazuje každý z bodov $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ na seba a bod $(0, 0, 1)$ na $(1, 1, 1)$.

75.  Určte inverzné zobrazenie k zobrazeniu

$$\begin{aligned}f: x' &= 2x + 3y - 7, \\ y' &= 3x + 5y - 9.\end{aligned}$$

6. ZMENA SÚRADNICOVEJ SÚSTAVY

76. ✎ Vrcholy štvorstena $ABCD$ sú v bodoch $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$. Uvažujme novú súradnicovú sústavu:

$$\begin{aligned} O' &= A, \\ \mathbf{e}'_1 &= \frac{C + D}{2} - A, \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{B + D}{2} - A, \\ \mathbf{e}'_3 &= \frac{B + C}{2} - A. \end{aligned}$$

Napíšte maticu prechodu k súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ a použite ju vhodným spôsobom na výpočet nových súradníc (t.j. súradníc vhladom na $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$) vrcholov štvorstena $ABCD$.

77. ☞ Nech body

$$P = (2, 1), \quad Q = (1, -1), \quad R = (0, 2)$$

majú v novej súradnicovej sústave súradnice

$$P = (1, 0), \quad Q = (0, 0), \quad R = (4, 5).$$

Nájdite túto súradnicovú sústavu (čiže súradnice bodu O' a vektorov $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ v pôvodnej súradnicovej sústave)!

78. ✎ Nájdite súradnice bodov $A = (4, 6)$, $B = (4, 0)$ a vektorov $\mathbf{u} = (2, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 8)$ v sústave súradníc

$$O' = (2, 1), \mathbf{e}_1 = (1, 1), \mathbf{e}_2 = (-1, 2).$$

79. ☞ Nájdite sústavu súradníc, v ktorej majú body $A = (0, 5)$, $B = (2, 8)$, $C = (-1, -4)$ nové súradnice $A = (1, 1)_{E'}$, $B = (2, 1)_{E'}$, $C = (-1, -2)_{E'}$.

80. ☞ V rovine si zvolíme nový repér:

$$O' = (-3, 1), \mathbf{e}'_1 = (2, 1), \mathbf{e}'_2 = (1, 1).$$

Nájdite vyjadrenie nových súradníc bodov a vektorov pomocou starých súradníc.

7. ORIENTÁCIA AFINNÉHO PRIESTORU

81. Pre ktoré hodnoty parametra m sú dané bázy $\mathbf{a}_1 = (3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1)$ a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ priestoru $\mathbb{R}^2$ rovnako (súhlasne) orientované?

- (a) $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, m)$,
 (b) $\mathbf{b}_1 = (m, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, m)$.

82. Zistite, či sú bázy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ a $(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ rovnako orientované.

83. Zistite, ktoré z báz $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$ priestoru $\mathbb{R}^3$ sú rovnako orientované.

84. V $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ nájdite maticu prechodu od bázy $(Q - P, R - P)$ k báze $(R - Q, P - Q)$ a na jej základe zistite, či bázy sú rovnako orientované (P, Q a R sú navzájom rôzne nekolineárne body).

85. V $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ majme štvorsten $ABCD$. Nájdite maticu prechodu od bázy $(B - A, C - A, D - A)$ k báze $(A - B, C - B, D - B)$ a na jej základe zistite, či sú tieto bázy rovnako orientované.

Cieľom nasledujúcich cvičení je presvedčiť sa, že orientácia súradnicových sústav v reálnej rovine, ako sme si ju definovali pomocou signatúry determinantu matice prechodu od jednej sústavy k druhej, naozaj popisuje naše intuitívne vnímanie orientácie: ak štandardnú sústavu (x -os doprava, y -os nahor) nazveme kladne orientovanou, tak potom je kladne orientovaná každá súradnicová sústava, v ktorej sa z kladného smeru x -osi na kladný smer y -osi dostaneme otočením o menej ako π proti smeru hodinových ručičiek.

86. Overte, že ak v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ zvolíme nový začiatok súradnicovej sústavy (t.j. $O' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$) a jednotkové vektory necháme nezmenené (t.j. $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i$, pre $i = 1, 2, \dots, n$), bude mať nová súradnicová sústava rovnakú (súhlasnú) orientáciu ako stará.

87. Overte, že ak v súradnicovej sústave v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ iba prenásobíme báзовé vektory kladným číslom, (t.j. $O' = O$, $\mathbf{e}'_i = c_i \mathbf{e}_i$, kde $c_i \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$), bude nová súradnicová sústava súhlasne orientovaná so starou.

88. Overte, že ak v reálnej rovine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zvolíme novú súradnicovú sústavu tak, že otočíme starú okolo začiatku (t.j. $O' = O$, $\mathbf{e}'_1 = \rho(\mathbf{e}_1)$ a $\mathbf{e}'_2 = \rho(\mathbf{e}_2)$, kde $\rho: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je otočenie okolo začiatku súradnicovej sústavy, viď zadanie 67), bude mať nová súradnicová sústava rovnakú orientáciu ako stará.

89. Nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je „štandardná“ súradnicová sústava, t.j. kladný smer x -osi smeruje doprava a kladný smer y -osi nahor, čiže zvierá s kladným smerom x -osi uhol $\pi/2$ proti smeru hodinových ručičiek. Nech v novej súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ platí

$$\begin{aligned} O' &= O, \\ \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}'_2 &= a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Pre aké $a, b \in \mathbb{R}$ bude $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ súradnicovou sústavou? Pre aké $a, b \in \mathbb{R}$ bude táto súradnicová sústava súhlasne orientovaná so sústavou $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$?

8. VZDIALENOSŤ DVOCH BODOV, METRICKÝ PRIESTOR

90. ✎ V rovine sú dané body $A = (-1, 0)$ a $B = (3, 2)$.

- (a) Na y -osi nájdite bod C tak, aby trojuholník ABC mal pri vrchole C pravý uhol.
- (b) Vypočítajte obsah tohto trojuholníka.

91. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A = (0, -1)$, $B = (0, 1)$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = |BX|$. (Zrejme túto množinu vidíte na prvý pohľad, ale skúste formálne ukázať, že naozaj je to správna množina: rozpíšte do detailov podmienku $|AX| = |BX|$.)

92. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$. Nájdite množinu bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od A a B .

93. ✎ Na súradnicových osiach v reálnej rovine nájdite body, ktorých vzdialenosť od bodu $(5, 2)$ je 3.

94. ♡ Overte, že body

$$A_0 = (0, 0, 0), \quad A_1 = (0, 1, 1), \quad A_2 = (1, 0, 1), \quad A_3 = (1, 1, 0)$$

sú vrcholmi pravidelného štvorstena.

95. ♡ Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A = (4, 0)$, $B = (1, 0)$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = 2|BX|$.

96. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = 2|BX|$.

97. Overte, že euklidovská vzdialenosť bodov v $\mathbb{E}$ je naozaj metrikou. Presnejšie, overte, že pre $d(A, B) = \|B - A\|$ platí

- (i) $d(A, B) \geq 0$ pričom $d(A, B) = 0$ práve vtedy, keď $A = B$,
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$,
- (iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

(V dôkaze sa zrejme budete odkazovať na vhodné vlastnosti normy.)

98. V reálnom afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ sa dajú okrem štandardnej euklidovskej definovať i iné, menej štandardné metriky:

- Manhattanská (taxikárska) metrika: koľko najmenej musí taxikár najazdiť, aby sa v Manhattane dostal z bodu A do bodu B :

$$d_M(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \cdots + |b_n - a_n|.$$

- Čebyševova (šachovnicová, maximová) metrika: koľko najmenej krokov musí šachový kráľ urobiť na šachovnici, aby sa dostal z bodu A do bodu B :

$$d_C(A, B) = \max\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|, \dots, |b_n - a_n|\}.$$

- diskrétna metrika:

$$\begin{aligned} d_D(A, B) &= 0 \quad \text{pre} \quad A = B \\ d_D(A, B) &= 1 \quad \text{pre} \quad A \neq B \end{aligned}$$

- (a) Aká je vzdialenosť bodov $A = (5, -3)$ a $B = (2, 1)$ v štandardnej, manhattanskej, Čebyševovej a diskkrétnej metrike?
- (b) Ako vyzerá v týchto metrikách jednotková kružnica (t.j. množina bodov, ktorých vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy je 1)?

99. Overte, že trojuholník s vrcholmi

$$(0, 0), \quad (3, 1), \quad (1, 7)$$

je pravouhlý.

100. Zistite, či trojuholník s vrcholmi

$$(2, 1), \quad (4, 8), \quad (10, 6)$$

tupouhlý.

101. Určte dĺžky strán a veľkosti uhlov trojuholníka s vrcholmi

$$(1, 1, 1), \quad (4, 5, 13), \quad (9, 7, 1).$$

* **102.** Určte oblasť všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice vyhovujú nerovnostiam:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 3/2 \\ \cos(2x - y) &< 0 \end{aligned}$$

* **103.** V rovine je daná úsečka AB a na nej pohyblivý bod M . Nad úsečkami AM , BM zostrojte štvorce tak, aby ležali v jednej polrovine vzhľadom na priamku $\overleftrightarrow{AB}$. Zistite geometrické miesto stredov úsečiek, ktoré spájajú stredy oboch uvažovaných štvorcov.

* **104.** Dané sú body A, B, C tak, že $AB \perp AC$, $|AB| = 3$, $|AC| = 4$. Vyšetrite geometrické miesto bodov X v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B, C platí

$$\begin{aligned} |AX| : |BX| &= 1 : 2 \\ |AX| : |CX| &= 1 : 1 \end{aligned}$$

* **105.** Je daná kružnica k so stredom S a polomerom r a bod A ležiaci zvonka kružnice k . Vyšetrite geometrické miesto bodov v rovine, ktoré sú rovnako vzdialené od kružnice k a od bodu A .

* **106.** Nájdite geometrické miesto bodov v rovine, ktorých súčin vzdialeností od ramien rovnoramenného trojuholníka sa rovná štvorcu vzdialeností od základne tohto trojuholníka.

9. VEKTOROVÝ SÚČIN

107. V priestore $V^3(\mathbb{R})$ ($= \mathbb{R}^3$) dokážte:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} : \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

(tzv. Lagrangeova identita).

Pre zaujímavosť, na pravej strane rovnosti sa nachádza tzv. Gramov determinant vektorov $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, čo je determinant matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

108. ✂ Vypočítajte obsah trojuholníka s vrcholmi $A = (-1, 1)$, $B = (3, -2)$ a $C = (2, 2)$.

109. ♠ Vypočítajte obsah trojuholníka s vrcholmi

$$A = (-1, 1, 2), \quad B = (3, -2, 0) \quad \text{a} \quad C = (2, 2, -1).$$

110. Určte obsah trojuholníka v rovine, ktorého jeden vrchol leží na x -osi vo vzdialenosti a , druhý vrchol leží na y -osi vo vzdialenosti b a tretí vrchol je v bode (c, d) .

111. Ukážte, že dvojnásobok orientovaného obsahu (konvexného) mnohoúhelníka s vrcholmi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ je

$$[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

112. V reálnej rovine máme body

$$P = (1, 2), \quad Q = (2, 1), \quad R = (4, 3).$$

Nájdite vzdialenosť bodu R od priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ (t.j. výšku na stranu PQ v $\triangle PQR$).

113. V $\mathbb{E}^3$ dokážte, že súčet štvorcov kolmých priemetov úsečky do troch navzájom kolmých rovín je rovný dvojnásobku štvorca tejto úsečky!

10. AFINNÁ A KONVEXNÁ KOMBINÁCIA BODOV

114. ✎ Nech $A, B \in \mathbb{A}$, $A \neq B$,

$$\overleftrightarrow{AB} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Akej hodnote parametra t zodpovedá bod A ? Bod B ? Stred úsečky AB ?

115. ✎ Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$ a

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(1-t)A + tB \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako by ste pomocou parametra t charakterizovali úsečku AB ? A ako polpriamku $\overleftrightarrow{AB}$?

Ak v afinnej kombinácii bodov

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \quad \sum \lambda_i = 1$$

navyše platí $\lambda_i \geq 0 \forall i$, hovoríme o tzv. *konvexnej kombinácii bodov*.

116. 🏠 Pracujme v $\mathbb{E}^2$.

- Nech $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (1, 2)$. Nájdite všetky konvexné kombinácie bodov A, B, C . (Bude ich, prirodzene, nekonečne veľa, skúste ich množinu načrtnúť.)
- To isté pre štvoricu bodov $P = (0, 0)$, $R = (1, 0)$, $S = (0, 1)$, $T = (2, 2)$.
- Vyslovte hypotézu o množine všetkých konvexných kombinácií konečného počtu bodov.

11. PRIAMKA V ROVINE

- 117.** Nájdite parametrické vyjadrenie priamky v $\mathbb{A}^2$, ktorá
- (a) prechádza bodom $A = (3, -2)$ a má smerový vektor $\mathbf{a} = (-4, 2)$,
 - (b) prechádza bodom $A = (3, -2)$ a má ten istý smer ako os x (prvá súradnicová os),
 - (c) prechádza bodmi $B = (2, 3)$ a $C = (-5, -6)$,
 - (d) prechádza bodom $D = (-4, 10)$ a vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky (priamka p vytína na i -tej súradnicovej osi úsek a , ak a je i -ta súradnica priesečníku priamky p s touto osou),
 - (e) na y -osi vytína úsek 3 a prechádza bodom $M = (-5, 3)$.

- 118.** Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá
- (a) prechádza bodom $(2, -4)$ a má smer $\mathbf{u} = (-3, -1)$,
 - (b) má parametrické vyjadrenie $x = 5t$, $y = -8 + 4t$,
 - (c) os x pretína v bode $(2, 0)$ a os y v bode $(0, -6)$
 - (d) je rovnobežná s priamkou $7x - 3y + 5 = 0$ a prechádza bodom $(1, 1)$,
 - (e) je kolmá na priamku $4x + 5y - 3 = 0$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

- 119.** Nájdite parametrické vyjadrenie priamky:

- (a) $5x - 2y + 10 = 0$,
- (b) $x = 0$,
- (c) $y - 3 = 0$,
- (d) $x - y = 0$.

Ako overíte správnosť výsledku? (Inak ako pozrieť sa na učiteľa a čakať, že prikývne.)

- 120.** ☞ Aké súradnice majú priesečníky priamky p : $x - 4y + 3 = 0$

- (a) so súradnicovými osami,
- (b) s priamkou q : $x - y + 1 = 0$,
- (c) s priamkou r : $x = 2 + t, y = 4 - t$?

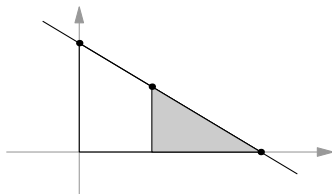
- 121.** ☞ Uvažujme afinnú/euklidovskú rovinu so súradnicami. Napíšte rovnicu priamky p , ktorá prechádza bodmi $A = (3, 1)$ a $B = (-1, 2)$ (t.j. $p = \overleftrightarrow{AB}$). Pre body $C = (1, 4)$, $D = (8, 0)$, $E = (-5, 3)$ a $F = (0, -1)$ rozhodnite, či ležia na priamke p . Priamku aj body načrtnite.

- 122.** Nech A, B, C, D, E, F a p sú ako v cvičení 121. Pre každý z bodov C, D, E a F napíšte rovnicu priamky, ktorá týmto bodom prechádza a je rovnobežná s priamkou p .

- 123.** ☞ Zistite, či ide o tú istú priamku v $\mathbb{E}^2$:

- p : $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$, q : $x = 3t$, $y = 1 - t$,
- p : $x = -2 - t$, $y = 5 + t$, q : $x = -2 + t$, $y = 5 + t$,
- p : $x = 2 + t$, $y = 2 + 2t$, q : $x = 1 - t$, $y = -2t$.

- 124.** Odvodte úsekovú rovnicu priamky v rovine geometricky pomocou podobnosti trojuholníkov určených súradnicovými osami a bodom priamky



125. (a) Vypočítajte vzdialenosť rovnobežiek

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by + c' = 0.$$

- (b) Určte rovnicu osi týchto rovnobežiek.

126. ☞ Dané sú dva protiľahlé vrcholy štvorca $A = (4, -1)$, $C = (-3, 0)$.

- (a) Nájdite jeho zvyšné dva vrcholy.
 (b) Nájdite rovnice priamok, na ktorých ležia jeho strany.
 (c) Čo viete povedať o všeobecných rovniciach navzájom rovnobežných priamok?

127. ☞ Nájdite stred a polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC , keď

$$A = (-10, 3), B = (15, -2), C = (-3, 10).$$

(Dá sa riešiť viacerými postupmi, podľa Vašich preferencií, napríklad:

- stratégia 1: stred opísanej kružnice je v priesečníku osí strán
- stratégia 2: treba napísať rovnicu kružnice prechádzajúcej danými bodmi)

128. Overte, že pre rôzne body $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ je $S = (\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$ naozaj stredom úsečky AB , presnejšie overte, že

(a) $|AS| = |BS|$,

(b) Overte, že $S \in \overleftrightarrow{AB}$.

129. ☞ Vypočítajte obsah trojuholníka v $\mathbb{E}^2$, ktorého strany majú rovnice $3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

130. ☞ Na priamke $p: x + y - 8 = 0$ nájdite také body, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu $P = (2, 8)$ i od priamky $q: x - 3y + 2 = 0$.

131. Určte množinu všetkých bodov X , pre ktoré $|Xp| = 3|Xq|$, ak $p: x + y - 1 = 0$, $q: 2x - y + 2 = 0$.

132. ☞ Určte všeobecné rovnice priamok, ktoré sú kolmé na priamku

$$p: x = 1 + 3t,$$

$$y = 1 - t$$

a ich vzdialenosť od bodu $P = (5, 9)$ je $\sqrt{10}$.

133. ☞ Určte všeobecné rovnice dotyčníc zostrojených ku kružnici $k(S, r)$ zo začiatku súradnicovej sústavy, ak $S = (3, -2)$, $r = 1$.

134. Nájdite rovnicu oboch osí rôznobežiek

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

135. ✎ Ťažisko rovnostranného trojuholníka leží v bode $T = (1, 4)$ a jeden jeho vrchol v bode $A = (-2, 2)$. Nájdite súradnice zvyšných dvoch vrcholov trojuholníka.

136. ✎ Vyjadrite maticou alebo nájdite predpis pre kolmé premietanie v rovine na priamku prechádzajúcu bodmi $(0, -1)$ a $(2, 3)$.

(Je viac spôsobov ako nájsť predpis pre toto zobrazenie: dá sa odvodiť priamo, dá sa aj vyskladať z jednoduchších zobrazení.)

137. ☞ Dané sú rovnice dvoch strán obdĺžnika: $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ a rovnica jeho diagonály: $3x + 7y - 10 = 0$. Nájdite rovnice zvyšných strán a druhej diagonály.

138. Nájdite rovnice a priesečník uhlopriečok rovnobežníka, ktorého strany ležia na priamkach

$$x = a_1, \quad x = a_2, \quad y = b_1, \quad y = b_2.$$

139. ✎ Nájdite kolmý priemet bodu $P = (2, 2)$ na priamku prechádzajúcu bodmi $(2, 0)$ a $(0, 1)$.

140. Bodom $(4, 3)$ vedte priamku tak, aby so súradnicovými osami ohraničila trojuholník s obsahom 24. Aký najmenší obsah môže mať takýto trojuholník?

141. Priamka $p \subset \mathbb{E}^2$ má všeobecnú rovnicu $2x - y - 1$. Body $R = (-1, 1)$ a $S = (0, 4)$ ležia v jednej polrovine vytatej priamkou p . Nájdite bod T na priamke p tak, aby mal $\triangle RST$ čo najmenší obvod.

(Pri hľadaní bodu T Vám možno pomôže využiť osovú súmernosť.)

* **142.** Nájdite geometrický locus stredov obdĺžnikov vpísaných do daného trojuholníka!

143. Dokážte: priamky

$$p_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$p_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$p_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

144. Analyticky dokážte, že výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

(Zvoľte si súradnicovú sústavu tak, že jedna strana a jedna výška ležia na súradnicových osiach.)

145. Aký uhol zvierá vektor $(-3, 12, -4)$ s jednotkovými vektormi súradnicového re-peru?

146. ✎ Určte všeobecnú rovnicu priamky p priestoru $\mathbb{E}^2$, ktorá obsahuje bod $M = (2, 1)$ a jej uhol s osou x je $\pi/4$.

147. ✎ Lúč svetla sa pohybuje po priamke $p : x - 2y + 5 = 0$. Napíšte rovnicu priamky q , po ktorej sa lúč pohybuje po odraze od priamky $r : 3x - 2y + 7 = 0$ a určte bod odrazu M .

148. ☞ Svetelný lúč prechádza bodom $A = (2, 3)$ a po odraze od priamky $p : x + y + 1 = 0$ bodom $B = (1, 1)$. Určte všeobecné rovnice priamok, v ktorých sa dopadajúci i odrazený lúč pohybuje.

149. ☞ V priestore $\mathbb{E}^2$ sú dané body $A = (3, 3)$ a $B = (0, 2)$. Na priamke $p : x + y - 4 = 0$ nájdite taký bod (body), z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi/4$.

12. PRIAMKA A ROVINA V PRIESTORE

150. Nájdite priesečníky spojnice bodov $(5, 4, -1)$ a $(3, -2, 7)$ so súradnicovými rovinami!

151. ☞ Nájdite parametrické vyjadrenie roviny v $\mathbb{A}^3$, ktorá

- (a) prechádza bodom $A = (1, 2, 3)$ a má smer $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ($\mathbf{e}_i$ sú jednotkové súradnicové vektory),
- (b) prechádza bodom A a má smerové vektory $\mathbf{u} = (-5, 6, 4)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$,
- (c) prechádza bodmi $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, -1, 0)$ a jej smer obsahuje smer y -osi,
- (d) prechádza bodom $M = (-1, 1, 1)$ a obsahuje y -os,
- (e) prechádza bodom $N = (-2, 3, 0)$ a obsahuje priamku p : $(x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t)$,
- (f) prechádza priamkou q : $(x = 2 + 3t, y = -1 + 6t, z = 4t)$ a jej smer obsahuje smer priamky r : $(x = -1 + 2t, y = 3t, z = -t)$.

152. Napíšte kanonické rovnice priamky a prepíšte ich do tvaru sústavy rovníc:

- (a) $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 6t$,
- (a) $x = 8 + 3t, y = -3t, z = 1 + 2t$.

153. ☞ Napíšte rovnice priamky p , ktorá prechádza bodom $A = (0, 1, -4)$ rovnobežne s priamkou q : $x + 2y + z - 1 = 0$, $2x + 2y - 3z + 6 = 0$.

154. ☞ Napíšte rovnicu roviny ρ , ktorá prechádza z -osou rovnobežne s priamkou p : $x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = 1 + 3t$.

155. ☞ Nájdite všeobecnú rovnicu roviny v $\mathbb{A}^3$:

$$\alpha: x = 1 - u + 2v, \quad y = 2 + u + v, \quad z = 1 + 2u - 3v.$$

Ako môžete overiť správnosť výsledku?

156. ☞ Dokážte, že roviny

$$\begin{aligned} \alpha: \quad & x = 1 + u - v, \quad y = -u + 2v, \quad z = u + v, \\ \beta: \quad & 3x + 2y - z - 3 = 0 \end{aligned}$$

sú totožné, a že priamka

$$p: x = 2 + t, \quad y = -1, \quad z = 1 + 3t$$

leží v rovine α .

157. ☞ Zistite, ktoré z bodov

$$A = (6, 8, 15), \quad B = (0, -1, -3), \quad C = (6, 7, 1), \quad D = (1, \frac{1}{2}, 0), \quad E = (1, 0, 1)$$

ležia na priamke p : $x_1 = 2 + 2t, x_2 = 2 + 3t, x_3 = 3 + 6t$.

158. Zisite, či bod M leží v podpriestore $A + V_\alpha$, kde $A = (2, 2, 1)$, $V_\alpha = \langle (1, 2, 1), (1, 3, 0) \rangle$.

159. ☞ Nájdite parametrické vyjadrenie priamky, ktorá leží v rovine

$$\alpha: x + 2y - z + 1 = 0$$

a pretína priamky

$$\begin{aligned} p: \quad & x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 4t, \\ q: \quad & 3x + y + z - 11 = 0, \quad x + z - 3 = 0. \end{aligned}$$

160. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou $p: x + 2y - z + 4 = 0$, $3x - y + 2z - 1 = 0$ a bodom $A = (-3, 1, 0)$.

161. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou

$$\begin{aligned} p: 2x + 3y - z + 5 &= 0 \\ 3x - 2y + 2z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

a má smerový vektor

- (a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$,
(a) $\mathbf{u} = (4, -7, -13)$.

162. $\mathcal{Z}$ Nájdite súradnice vrcholov nejakej kocky v $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, ktorej jedna hrana je úsečka spájajúca body $(-1, -1, -1)$ a $(2, 3, 4)$.

163. $\mathcal{Z}$ Doplnite body $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, -1, 2)$ priestoru $\mathbb{A}^3$ bodom D rôznym od A, B, C tak, aby celá štvorica bola koplanárna.

164. $\mathcal{H}$ Zistite, či body $(-1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 1, 1)$, $(2, 2, -1)$ priestoru $\mathbb{A}^3$ sú alebo nie sú koplanárne.

165. Dokážte, že prienik roviny

$$\alpha: 7x - 6y + 5z - 35 = 0$$

s rovinou

$$\beta: x = 1 - u + v, \quad y = 2 + u - 2v, \quad z = u + v$$

je priamka a nájdite jej parametrické vyjadrenie.

166. $\mathcal{Z}$ Nájdite kolmý priemet bodu $P = (10, 10, 7)$ do roviny prechádzajúcej bodmi $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ a $(0, 0, 3)$.

167. $\mathcal{H}$ Zistite, či bod M leží v rovine $A + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $A = (2, 2, 1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 0)$:

- (a) $M = (6, 30, 13)$,
(b) $M = (7, 17, 8)$,
(c) $M = (7, 13, 5)$,
(d) $M = (12, 32, 15)$.

168. $\mathcal{Z}$ Napíšte sústavy rovníc pre strany (priamky) trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníky súradnicových osí s rovinou $\alpha: 3x + 7y - 4z - 5 = 0$.

169. $\mathcal{Z}$ Určte vnútorné uhly trojuholníka vyfatého na rovine $\alpha: 3x - y + 4z - 12 = 0$ súradnicovými rovinami.

170. Vypočítajte súradnice päty kolmice spustenej zo začiatku na rovinu

$$ax + by + cz + d = 0.$$

171. $\mathcal{H}$ Vypočítajte dĺžky výšok štvorstena $ABCD$ ak

$$A = (6, 0, 0), \quad B = (0, 4, 0), \quad C = (0, 0, 2) \quad \text{a} \quad D = (0, 0, 0).$$

172. Štvorsten má vrcholy

$$(1, 1, 2), \quad (1, 4, 2), \quad (5, 4, -1), \quad (13, 0, 5).$$

Určte smer výšky spustenej z posledného vrchola! Aký uhol zvierá táto výška so spojnicou štvrtého a druhého vrchola?

173. Vypočítajte súradnice ťažiska štvorstena s vrcholmi (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, 4$!

174. Ukážte, že spojnice stredov protiľahlých hrán štvorstena sa pretínajú v jeho ťažisku!

175. ☞ Napíšte parametrické rovnice priamky p , ktorá prechádza bodom $A = (5, 1, -12)$ rovnobežne s rovinou

$$\alpha: 3x - 2y + z - 14 = 0$$

a pretína priamku

$$q: x = 10 + 3t, y = -5 - 2t, z = 6 + 2t.$$

176. ☞ Určte parametrické vyjadrenie i všeobecné rovnice priamky p , ktorá obsahuje bod $M = (3, -2, 1)$, je rovnobežná s rovinou

$$\alpha: 3x + 4y + 2z + 1 = 0$$

a pretína priamku

$$q: x = -t, y = -1 - t, z = 2 + 3t.$$

177. ☞ Zostavte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = (9, 8, -7)$ kolmo na priamku p , ak

- (a) $p: x = 35 + 2t, y = -435 - t, z = 3t,$
 (b) $p: x - y - 3z - 91 = 0, 2x + y - 2z + 2 = 0.$

178. Napíšte parametrické vyjadrenie aj rovnicu priamky q , ktorá prechádza bodom $M = (m, n)$ kolmo na priamku $p: ax + by + c = 0$.

179. Napíšte rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s osou z a na x - a y -osi vytína úseky dĺžok 3 a 5!

180. ☞ Určte vzájomnú polohu rovín α, β z $\mathbb{E}^3$, ak

- (a) $\alpha: 2x + 3y + 4z - 12 = 0; \beta: 3x - 6y + 1 = 0,$
 (b) $\alpha: 3x - 2y - 3z + 5 = 0; \beta: 9x - 6y - 9z - 5 = 0,$
 (c) $\alpha: x = 1 + u + v, y = 2 + u, z = 3 + u - v; \beta: x = 1 + u, y = 3u + v, z = 4 + 2u + 2v,$
 (d) ☞ $\alpha: x - 2y + z = 0; \beta: x = 1 + u + v, y = 2 + u, z = 3 + u - v.$

181. ☞ Vyšetrite vzájomnú polohu priamky p a roviny α (prípadne určte ich prienik), ak

- (a) ☞ $p: x = 12 + 4t, y = 9 + 3t, z = 1 + t; \alpha: 3x + 5y - z - 2 = 0,$
 (b) $p: x = -1 + 2t, y = 3 + 4t, z = 3t; \alpha: 3x - 3y + 2z - 5 = 0,$
 (c) $p: 2x + 3y + 6z - 10 = 0, x + y + z + 5 = 0; \alpha: y + 4z + 17 = 0,$
 (d) $p: x + 2y + 3z + 8 = 0, 5x + 3y + z - 16 = 0; \alpha: x = 2 + u + 3v, y = -8 + 6u - 8v, z = -3 - u + 3v.$

182. Dokážte, že priamka $p: x_1 = 0, x_2 = 1 + t, x_3 = 3 - 2t, x_4 = 2t$ je rovnobežná s rovinou $\alpha: x_1 = 1 + u + v, x_2 = u, x_3 = -1 - 2u, x_4 = u - v$ a vypočítajte $|\rho\alpha|$.

183. ☞ Vyšetrite vzájomnú polohu priamok v $\mathbb{E}^3$:

$$p: x - 2z = 7, y = 2$$

$$q: x + z = -1, 2x + y = 1.$$

184. ☞ Vyšetrite vzájomnú polohu priamok p, q , ak

- (a) $p: x = 1 + 2t, y = 2 - 2t, z = -t; q: x = -2t, y = -5 + 3t, z = 4,$
 (b) $p: x = 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4; q: x - 3y + z = 0, x + y - z + 4 = 0,$
 (c) $p: 2x + 3y = 0, x + z - 8 = 0; q: z - 4 = 0, 2x + 3y = 0.$

Body A, A' sa nazývajú *súmerné podľa priamky p* , ak

- $A' - A \perp p$,
- stred úsečky AA' leží na priamke p .

185. ✎ Nájdite bod súmerný k bodu $M = (1, -2, -2)$ podľa priamky

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

186. Nájdite bod súmerný k bodu $M = (1, 2, 3)$ podľa priamky

$$\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

187. ✎ Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $M = (1, 2, 3)$ a pretína priamky

$$\begin{aligned} p: x &= 2t, y = -1 - 2t, z = 2 + t, \\ q: x &= 4t, y = -2, z = 3t. \end{aligned}$$

(Môžte napríklad najprv nájsť rovinu, ktorá obsahuje priamku p a prechádza bodom M , a následne nájsť jej prienik s priamkou q .)

188. ✎ Sú dané priamky:

$$\begin{aligned} p: x &= 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4t, \\ q: x &= -2 + 3t, y = -1, z = 4 - t, \\ r: x - 3y + z &= 0, x + y - z + 4 = 0. \end{aligned}$$

Určte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá pretína prvé dve a je rovnobežná s tretou priamkou.

(Podobne ako v predchádzajúcom príklade môžete najprv nájsť rovinu, ktorá obsahuje priamku p a smer priamky r , a následne nájsť jej prienik s priamkou q .)

189. ☒ Nájdite priamku pretínajúcu mimobežky

$$\begin{aligned} p: x + y &= 0, x - y + z = -4 \text{ a} \\ q: x + 3y &= -4, y + z = 2, \end{aligned}$$

ktorá

- (a) prechádza bodom $M = (2, 3, 8)$,
- (b) má smerový vektor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$

190. Bod, ktorého sprievodič (smerový vektor) zvierá so z -osou uhol $2\pi/3$, sa kolmno na xy -rovinu premieta do bodu $(5, 12)$. Určte jeho súradnice!

191. Aké uhly zvierajú so z -osou polpriamky, ktoré s osami x a y zvierajú uhol $\pi/3$?

192. Nájdite priamky, ktoré so všetkými súradnicovými osami zvierajú zhodné uhly! Aká je veľkosť tohto uhla?

193. Akej rovnici vyhovujú body, ktorých vzdialenosť od bodu $(-3, 2, 7)$ je 5?

194. ☒ Nájdite vzdialenosť bodu $M = (1, 2, -3)$ od roviny prechádzajúcej bodmi

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2).$$

195. ☞ Nájdite priamku, ktorá kolmo pretína priamku

$$p: x = 3 + 4t, y = 1 - t, z = 2 + 5t$$

a y -os.

196. Nájdite rovnicu roviny, ktorá pretína xy -rovinu v priamke

$$8x - 4y + 12 = 0, \quad (z = 0)$$

a má od začiatku vzdialenosť rovnú 1!

197. Bodom $(-3, 0, 5)$ veďte rovinu, ktorá pretne yz -rovinu v priamke

$$2y - 6z + 9 = 0, \quad (x = 0).$$

198. Nájdite rovnicu roviny, ktorá kolmo rozpoľuje úsečku s koncovými bodmi (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) !

199. Nájdite priesečníky roviny

$$x + 3y - 2z - 2$$

so spojnicou bodov $(-1, 3, 2)$ a $(5, -3, -1)$!

200. Nájdite súradnice bodu, ktorý leží na kolmici spustenej zo začiatku na rovinu

$$5x - y + 7z + 32 = 0$$

vo vzdialenosti 4 od tejto roviny!

201. Nájdite uhol, ktorý zvierajú roviny

(a)

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$

(b)

$$x - az - p = 0, \quad y - bz - q = 0$$

202. Osou x preloďte rovinu kolmú na rovinu

$$ax + by + cz + d = 0.$$

203. Aká je vzdialenosť rovnobežných rovín

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{a} \quad ax + by + cz + d' = 0?$$

204. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou

$$ax + by + cz + d = 0$$

vo vzdialenosti p !

205. Aká je rovnica roviny, ktorá rozpoľuje vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín?

206. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi

$$(0, y_1, z_1), \quad (x_2, 0, z_2), \quad (x_3, y_2, 0)!$$

207. Rovina má od začiatku vzdialenosť p a so súradnicovými rovinami zvierá uhly α, β, γ . Určte jej rovnicu!

208. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s x -osou, prechádza bodom (x_0, y_0, z_0) a s y -osou zvierá uhol α !

209. $\hat{=}$ Vypočítajte vzdialenosť mimobežiek p, q :

$$p: x = 9 + 6t, y = -2t, z = 2 - t,$$

$$q: \frac{x+5}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

210. $\hat{=}$ V množine všetkých rovín priestoru $\mathbb{E}^3$ obsahujúcich priamku

$$p: 2x + y - 3z + 2 = 0, 5x + 5y - 4z + 3 = 0$$

nájdite dvojicu navzájom kolmých rovín tak, aby jedna z nich obsahovala bod $P = (4, -3, 1)$.

211. $\hat{=}$ Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá obsahuje priamku

$$p: x - 3y + 7z + 36 = 0, 2x + y - z + 15 = 0$$

a jej vzdialenosť od bodu $O = (0, 0, 0)$ je 3.

212. Nájdite vzdialenosť bodu (x_0, y_0, z_0) od priamky prechádzajúcej začiatkom a majúcej smer (a, b, c) !

213. $\angle$ Nájdite príklad troch priamok v $\mathbb{E}^3$ tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.

214. Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky určenej

- (a) bodom $A = (5, -1, 4, 2)$ a smerovým vektorom $\mathbf{a} = (3, -1, 4, 2)$,
- (b) bodmi $B = (5, -1, 3, 2)$, $C = (6, -1, 5, 5)$.

215. $\angle$ Presvedčte sa, že

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + u - 2v - w \\ x_2 &= u + w \\ x_3 &= -1 - u + v \\ x_4 &= 2u - v + w \end{aligned}$$

je parametrické vyjadrenie roviny v štvorrozmernom afinnom priestore. Ktorým parametrom zodpovedá v tomto vyjadrení bod $M = (4, 1, -3, 3)$?

216. $\angle$ Nájdite parametrické vyjadrenie podpriestoru v $\mathbb{E}^5$, ktorého všeobecné rovnice sú

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

217. $\angle$ V $\mathbb{E}^4$ nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ určuje súradnicovú sústavu. Určte vzájomnú polohu roviny $O + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ s priamkou $E_4 + \langle \mathbf{e}_3 \rangle$, kde $E_4 = O + \mathbf{e}_4$.

218. $\hat{=}$

- (a) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad dvoch rovín, ktoré sa pretínajú v jedinom bode.
- (b) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
- (c) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v $\mathbb{E}^5$.

219. $\hat{=}$

- (a) Nájdite príklad troch priamok v $\mathbb{E}^3$ tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.
- (b) $\angle$ Dokážte, že priamka a rovina v $\mathbb{E}^3$ nemôžu byť mimobežné.
- (c) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
- (d) Dokážte, že dve roviny v $\mathbb{E}^4$ nemôžu byť mimobežné.

(e) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v $\mathbb{E}^5$.

220. $\blacklozenge$ V $\mathbb{E}^4$ sú dané body

$P_0 = (1, 1, 2, 2)$, $P_1 = (0, 1, 0, 1)$, $P_2 = (1, 2, 0, 3)$ a $Q = (0, 2, -4, 2)$, $R = (-1, 2, -4, 1)$.

- (a) Zistite, či platí $Q \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, $R \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$.
- (b) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, Q \rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, R \rangle$.
- (c) Vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle \cap \langle Q, R \rangle$.
- (d) Vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru $\langle P_0, P_1 \rangle \cap \langle Q, R \rangle$, a zistite vzájomnú polohu $\langle P_0, P_1 \rangle$ a $\langle Q, R \rangle$.

13. INVARIANTY AFINNÝCH TRANSFORMÁCIÍ

221. Nech $\pi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je kolmé premietanie na x -os: $\pi: (a, b) \mapsto (a, 0)$.

- (1) Nájdite invariantné body premietania π , tiež invariantné smery a ich vlastné čísla.
- (2) Nájdite invariantné priamky transformácie π . Sú medzi nimi aj bodovo samodružné priamky?

222. ☞ Nech $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je súmernosť podľa priamky $y - x = 0$, t.j. $\varphi: (a, b) \mapsto (b, a)$.

- (1) Nájdite invariantné body zobrazenia φ , tiež invariantné smery a ich vlastné čísla.
- (2) Nájdite invariantné priamky transformácie φ . Sú medzi nimi aj bodovo samodružné priamky?

223. Nech f je transformácia euklidovskej roviny daná maticou

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Nájdite invariantné body zobrazenia f , tiež invariantné smery a ich vlastné čísla.
- (2) Nájdite invariantné priamky transformácie f . Sú medzi nimi aj bodovo samodružné priamky?
- (3) Viete povedať, čo za zobrazenie je f ?

224. ☞ To isté zadanie ako pri predchádzajúcom cvičení pre zobrazenie g s analytickým predpisom

$$g(x, y) = (x - 1, x + 1).$$

225. To isté zadanie ako pri cvičení 223 pre zobrazenie g s analytickým predpisom

$$g(x, y) = (-y - 1, x - 3).$$

226. ☞ Dané je afinné zobrazenie

$$f: (x, y) \mapsto (3x + 4y - 12, 4x - 3y + 6).$$

Na priamke

$$p: 7x - 2y - 24 = 0$$

nájdite bod, ktorého obraz leží na tej istej priamke.

227. Napíšte maticu inverzného zobrazenia k afinite $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$:

$$f: (x, y) \mapsto (2x + 3y - 7, 3x + 5y - 9).$$

228. ☞ Môže byť 0 vlastným číslom afinity? Ak áno, uveďte príklad. Ak nie, zdôvodnite.

229. ☞ Určite samodružné body a samodružné smery afinnej transformácie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ ($\mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$):

- (a) $(x, y) \mapsto (2x - y + 1, x + 2y + 3)$,
- (b) $(x, y) \mapsto (2x - 5y, 2x + 3y)$,
- (c) $(x, y) \mapsto (\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3})$,
- (d) $(x, y) \mapsto (3x - y, x + y)$,
- (e) $(x, y) \mapsto (3x - y + 6, 3y + 4)$,
- (f) $(x, y) \mapsto (3x + 4y - 8, x + 3y - 4)$,
- (g) $(x, y) \mapsto (4x + 5y - 11, 2x + 4y - 7)$,
- (h) $(x, y) \mapsto (5x + y, 4x + 8y)$,

- (i) $(x, y, z) \mapsto (2x-2y-2z+1, 2x+3y-3z, y-z+4),$
- (j) $(x, y, z) \mapsto (4x-y-2z, 2x+y-2z, x-y+z),$
- (k) $(x, y, z) \mapsto (x-y+2z-7, y+z-5, x-2y+z+6).$

230. $\heartsuit$ Určte samodružné body a priamky afinnej transformácie:

- (a) $\mathcal{L} \quad (x, y) \mapsto (-x+4y-2, 2x-3y+3),$
- (b) $(x, y) \mapsto (3x+y-1, 2x+2y-1),$
- (c) $(x, y) \mapsto (7x-y-1, 4x+2y+4),$
- (d) $(x, y) \mapsto (\frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5}),$

231. Určte samodružné body, priamky a roviny afinnej transformácie:

- (e) $\mathcal{L} \quad (x, y, z) \mapsto (x+4y+z+1, 2x+2y+z, -8x-2z-1),$
- (f) $(x, y, z) \mapsto (2x+y+1, 2y+z, 2z+3),$
- (g) $(x, y, z) \mapsto (3x-4y+6, 4x+3y-8, -2z+9),$
- (h) $(x, y, z) \mapsto (2x+y-2z+2, -y+z, 2y+2),$
- (i) $(x, y, z) \mapsto (2y, 2x, z+1),$
- (j) $(x, y, z) \mapsto (x+y, y+z, z+1),$
- (k) $(x, y, z) \mapsto (2x-2, -6x-y+14, 19x+6y+z-44),$
- (l) $(x, y, z) \mapsto (x-y, x+y, z+2),$
- (m) $(x, y, z) \mapsto (x+z+1, 2x+2y+z-1, -2z),$
- (n) $(x, y, z) \mapsto (x+2y+z-3, -y+4, x+4y+z-2),$
- (o) $(x, y, z) \mapsto (2x+y-z+1, -x+z-1, 2x+2y+z+2),$
- (p) $(x, y, z) \mapsto (6x-2y-3z, -2x+3y-6z+6, -3x-6y-2z+1),$
- (q) $(x, y, z) \mapsto (-2x-2y+2z+1, 2x+3y-3z, y-z+4),$
- (r) $(x, y, z) \mapsto (2x+4y-2z+2, 2x+5y-2z+2, -2x-4y+3z-2),$
- (s) $(x, y, z) \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z),$

232. $\mathcal{L}$ Transformácia roviny $\mathbb{E}^2$ sa nazýva *hyperbolická rotácia*, ak má tvar

$$\begin{aligned} f: x' &= ax, \\ y' &= \frac{1}{a}y \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} f: x' &= ay, \\ y' &= \frac{1}{a}x \end{aligned}$$

pre nejaké $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Nech $p \in \mathbb{R}$ a nech h_p je množina

$$\{X = (x, y) \mid xy = p\}.$$

Ukážte, že ak $X \in h_p$, tak aj $f(X) \in h_p$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.

14. IZOMETRIE EUKLIDOVSKÉJ ROVINY

233. $\mathcal{Z}$ Nájdite izometriu euklidovskej roviny, pre ktorú je bod $(3, -1)$ samodružný a smery $(1, 1)$, $(1, -1)$ sú tiež samodružné. Koľko je takých zobrazení?

234. $\mathcal{Z}$ Koľko existuje izometrií euklidovskej roviny, pre ktoré sú smery súradnicových osí samodružné a ktoré začiatok súradníc zobrazia do bodu $(1, -2)$? Nie je nutné napísať analytické predpisy ani matice týchto zobrazení, ale svoju odpoveď zdôvodnite, nestačí len napísať počet.

235. $\mathcal{Z}$ Koľko existuje izometrií euklidovskej roviny zobrazujúcich bod $(0, 0)$ do bodu $(3, 1)$ a bod $(0, 4)$ do niektorého bodu priamky $5x + 3y - 30 = 0$?

236. V rovine je daný trojuholník ABC . Určte samodružné body a samodružné smery transformácie, ktorá body A, B, C zobrazí v poradí do bodov B, C, A .

237. $\mathcal{A}$ Určte afinnú transformáciu roviny, pre ktorú

- (a) $\mathcal{Z}$ sú priamky $x + y + 1 = 0$ a $x - y + 2 = 0$ invariantné a bod $(1, 1)$ sa zobrazí do bodu $(2, 2)$,
- (b) je každý bod priamky $x + 2y - 1 = 0$ samodružný a bod $(1, 2)$ sa zobrazí do bodu $(2, 2)$,
- (c) sú súradnicové osi invariantnými priamkami a body $(2, 0)$ a $(0, 4)$ sa zobrazia do bodov $(-6, 0)$ a $(0, 8)$.

238. $\mathcal{Z}$ Ak má transformácia roviny dve rôznobežné samodružné priamky, tak ich priesečník je samodružným bodom tejto transformácie. Zdôvodnite.

239. Vrcholy štvorstena sú v bodoch

$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (0, 1, 0), D = (0, 0, 1).$$

Nájdite afinné zobrazenie, ktoré zobrazí body A, B, C, D do bodov B, C, D, A v tomto poradí. Nájdite invariantné priamky a roviny tohto zobrazenia.

240. $\mathcal{Z}$ Určte obraz priamky p , ktorej parametrické vyjadrenie je

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t, \\ y &= 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

v osovej súmernosti zobrazujúcej bod $(0, 0)$ do bodu $(4, -2)$.

241. Zistite, či f je zhodnosť

- (a) $\mathcal{Z} f : (x, y) \mapsto (x - \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 1)$,
- (b) $f : (x, y) \mapsto (x + 4, y + 3)$,
- (c) $f : (x, y, z) \mapsto (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + 1, \frac{1}{2}x)$.

242. Nájdite priamu a nepriamu izometriu, ktorá zobrazuje

- (a) $(1, 0) \mapsto (0, 0)$ a $(0, 0) \mapsto (0, 1)$,
- (b) $\mathcal{Z} (1, 0) \mapsto (1, 1)$ a $(5, 2) \mapsto (-1, 5)$.

243. V euklidovskej rovine nájdite predpis pre súmernosť podľa osi

- (a) $\mathcal{Z} 2x + y - 2 = 0$.
- (a) $x + y - 5 = 0$.

244. Určte $s \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala zhodnosť, ktorá zobrazí bod $(0, 0) \mapsto (5, 0)$ a $(3, 4) \mapsto (9, s)$. Nájdite rovnice takéhoto zobrazenia a určte obraz bodu $(5, 0)$.

245. Rovina sa otáča okolo bodu $(-1, 3)$ o uhol $\pi/4$. Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?

246. Napíšte rovnice strán pravidelného šesťuholníka, ak na priamke $4x + 2y - 1 = 0$ leží jedna jeho strana a začiatok sústavy súradníc je jeho stredom súmernosti.

247. Daná je priamka p , na ktorej leží strana rovnostranného trojuholníka. Nech T je ťažisko tohto trojuholníka. Určte vrcholy tohto trojuholníka, ak p má všeobecnú rovnicu

$$2x - y = 0$$

a $T = (5, 1)$.

248. Nájdite vrcholy ostrých uhlov rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, ak poznáte tretí vrchol $C = (1, 2)$ a priamky

$$p : 8x - y - 20 = 0$$

$$q : 7x + 4y - 41 = 0,$$

na ktorých ležia hľadané vrcholy.

249. Nech f je otočenie roviny $\mathbb{E}^2$ o uhol φ okolo S a g je otočenie o uhol ψ okolo T . Nech $g \circ f$ je posunutie. Určte vektor posunuta $g \circ f$. Čo viete povedať o $f \circ g$?

250. $\mathcal{Z}$ Pre aké s a t je zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$

$$f : x' = sx + \frac{12}{13}y - 3,$$

$$y' = \frac{12}{13}x + ty + \frac{7}{13}$$

zhodnosťou? A o akú zhodnosť sa jedná?

LITERATÚRA

- [1] Korešpondenčný seminár z matematiky, 1980/1981.
- [2] Bohumil Bydžovský. *Úvod do analytické geoketrie*. Jednota československých matematiků a fyziků, 1923.
- [3] Pavel Chalmovianský. Geometria afinných zobrazení euklidovských priestorov. <http://www.sccg.sk/~chalmo/Materialy/g2.pdf>.
- [4] H. S. M Coxeter. *Introduction to Geometry, Second Edition*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 1969.
- [5] Pavel Kršňák Milan Hejný, Valent Zaťko. *Geometria 1. pre študentov matematiky učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1985.
- [6] Pavol Zlatoš. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Albert Marenčin, 2011.