

1 Základné planimetrické konštrukcie

✎ 1. Daná je kružnica k a priamka p . Zostrojte dotyčnicu ku kružnici k rovnobežnú s priamkou p .

✎ 2. Daná je kružnica k a bod B ležiaci zvonka tejto kružnice. Zostrojte dotyčnicu ku kružnici k prechádzajúcu bodom B .

✎ 3. Daná je kružnica $k(S, r)$ a bod B ležiaci zvonka tejto kružnice. Uvažujme konštrukciu:

1. $l(S, 2r)$;

2. $m(B, |BS|)$;

3. A ; $A \in l \cap m$;

4. T ; $T \in k \cap AS$;

5. $\overleftrightarrow{TB}$.

Zdôvodnite, prečo je priamka $\overleftrightarrow{TB}$ dotyčnicou kružnice k .

✎ ☞ 4. Nech k, l sú kružnice, z ktorých ani jedna neleží vo vnútri druhej. Zostrojte spoločnú dotyčnicu kružníc k a l .

2 Osová súmernosť

1. Sú dané dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou p . Zostrojte bod X na priamke p taký, aby priamky $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BX}$ zvierali s priamkou p zhodné uhly.
2. Nech A, B predstavujú polohu dvoch biliardových guľí. Narysujte dráhu gule A , ktorá sa odráža od hrán h_1, h_2, h_3 (v tomto poradí) biliardového stola a nakoniec zasiahne guľu B .
3. Dané sú dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou p . Zostrojte bod X na priamke p , pre ktorý je:
- (a) súčet dĺžok úsečiek $|AX| + |BX|$ najmenší,
- (b) rozdiel dĺžok úsečiek $|AX| - |BX|$ najväčší, ak B je bližšie k p ako A .
4. Za predpokladov z príkladu 3 zostrojte bod X na priamke p taký, aby priamky $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BX}$ zvierali s priamkou p ostré uhly, z ktorých jeden je dvakrát väčší ako druhý.
5. Je daná priamka p , úsečka PQ a dva rôzne body A, B na tej istej strane od priamky p . Na priamke p zostrojte body X, Y tak, aby úsečka XY bola zhodná s danou úsečkou a dĺžka lomenej čiary $AXYB$ bola minimálna.
6. Nech A je vnútorný bod daného ostrého uhla. Na ramenách uhla nájdite body B, C (každý z bodov na inom ramene) tak, aby obvod trojuholníka ABC bol minimálny.
7. Nad danou úsečkou AB možno zostrojiť nekonečne veľa trojuholníkov ABC , ktoré majú rovnakú dĺžku v_c . Zostrojte ten z nich, ktorého obvod je najmenší.
8. Na základni AB ľubovoľného rovnoramenného trojuholníka ABC nájdite bod L , pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od priamok $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}$ minimálny.
9. Daná je priamka b a kružnice p, q . Zostrojte úsečku XY tak, aby $X \in p$, $Y \in q$, stred úsečky XY bol bodom priamky b a aby XY bola kolmá na b .
10. Dané sú dve kružnice k, l a priamka p . Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC , ktorých ťažnica t_c je časťou priamky p a vrcholy A, B ležia postupne na kružniciach k, l .

11. Dané sú tri rôznobežné a tým istým bodom neprechádzajúce priamky a, b, c . Zostrojte úsečku BC kolmú na priamku a tak, aby $B \in b$, $C \in c$ a stred úsečky BC bol na priamke a .
- ⌘ 12. Dané sú dve rovnobežné priamky x, y a priamka z s nimi rôznobežná. Zostrojte všetky štvorce $XYZV$, ktorých vrcholy sú $X \in x$, $Z \in z$ a uhlopriečka YV je časťou priamky y .
- ✂ 13. Dané sú tri rôzne priamky o_1, o_2, o_3 prechádzajúce bodom O a na jednej z nich je daný bod $A \neq O$. Zostrojte trojuholník ABC , pre ktorý sú dané priamky osami vnútorných uhlov.
14. Daná je kružnica k a tri rôzne priamky a, b, c prechádzajúce stredom kružnice k . Zostrojte trojuholník ABC , ktorý je opísaný danej kružnici a jeho vrcholy A, B, C ležia v poradí na priamkach a, b, c .
- ✂ 15. Dané sú tri priamky s_1, s_2, s_3 prechádzajúce bodom S a na jednej z nich je daný bod A_1 . Zostrojte trojuholník ABC , pre ktorý je A_1 stredom strany BC a priamky s_i sú osami jeho strán.
16. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané
- (a) $c, v_c, \omega = \alpha - \beta$
- (b) $b, a, \omega = \alpha - \beta$
17. Je daná priamka p , kružnica k , bod T a smer s . Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC s ťažiskom v bode T , ktorého základňa AB patrí smeru s , A leží na p a B na k .
- ⌘ 18. Daná je priamka $\overleftrightarrow{MN}$ a dve rôzne kružnice ležiace na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{MN}$. Na priamke $\overleftrightarrow{MN}$ zostrojte taký bod X , aby dotyčnice vedené z bodu X ku kružniciam zvierali s priamkou $\overleftrightarrow{MN}$ zhodné uhly.
- ⚠ 19. Je daný uhol $\angle MON$ a dva rôzne body A, B vo vnútri uhla. Na polpriamke $\overrightarrow{OM}$ zostrojte bod X tak, aby trojuholník XYZ bol rovnoramenný, pričom Y, Z sú v poradí priesečníky priamok $\overleftrightarrow{XA}, \overleftrightarrow{XB}$ s polpriamkou $\overrightarrow{ON}$.
20. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak poznáte dĺžky všetkých jeho strán a uhlopriečka AC je osou vnútorného uhla pri vrchole A .
21. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, do ktorého je možné vpísať kružnicu, ak sú dané dĺžky dvoch susedných strán AB, AD a veľkosti vnútorných uhlov

pri vrcholoch B, D .

22. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak sú dané: dĺžky $|AB|, |CD|$, súčet $|BC| + |AD|$, vzdialenosť vrchola A od priamky $\overleftrightarrow{CD}$ a viete, že vnútorné uhly pri vrcholoch C a D sú zhodné.

△ **23.** Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak sú dané: dĺžky $|AB|, |CD|$, súčet $|BC| + |AD|$ a vzdialenosti vrcholov A, B od priamky $\overleftrightarrow{CD}$.

24. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte dĺžky strán BC, CD, DA a uhol $\omega = \angle DAB - \angle ABC$.

∠ **25.** Nech V je priesečník výšok ľubovoľného trojuholníka ABC . Dokážte, že body V_1, V_2, V_3 súmerné k bodu V podľa strán trojuholníka ABC ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

∠ **26.** Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané body V_1, V_2, V_3 z predchádzajúceho príkladu.

⌘ **27.** Dané sú dve rovnobežky p, q a bod A ležiaci na priamke p . Ďalej je daný bod M ležiaci vnútri pásu s hranicami p, q . Zostrojte taký rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB , aby vrcholy B, C ležali po rade na priamkach q, p a bod M na priamke $\overleftrightarrow{BC}$. Urobte diskusiu vzhľadom na vzdialenosť rovnobežiek p, q a vzdialenosť A, M .

△ **28.** Daná je priamka p a body A, B ležiace po tej istej strane od priamky p . Na priamke p zostrojte taký bod X , aby súčet $|AX| + |BX|$ bol zhodný s danou dĺžkou $|MN|$.

△ **29.** Je daná priamka p , úsečka AB a dva rôzne body P, Q po rôznych stranách od priamky p . Zostrojte na priamke p taký bod X , aby rozdiel dĺžok úsečiek PX, QX bol zhodný s dĺžkou danej úsečky AB .

30. Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ je daný bod M . Dokážte, že existuje vypuklý štvoruholník s kolmými uhlopriečkami, ktorých dĺžky sa rovnajú dĺžkam strán AB, BC , a so stranami, ktorých dĺžky sa rovnajú po rade dĺžkam strán AM, BM, CM, DM .

31. Zostrojte trojuholník ABC , ak poznáte $a + b, v_a, c$.

32. Je daná kružnica k so stredom S a priemerom AB . Ďalej sú dané kružnice m, n , ktoré majú priemery AS, SB . Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú súčasne kružníc k, m, n .

- ✎ **33. (Fagnanov problém. Ortický trojuholník.)** Do ostrouhlého trojuholníka vpíšte trojuholník s čo najmenším obvodom. (Na každej strane daného trojuholníka leží jeden vrchol vpísaného trojuholníka.)

3 Posunutie

- ✎ 1. Dané sú dve kružnice k, l a priamka p . Zostrojte priamku q rovnobežnú s p tak, aby vzdialenosť medzi jej priesečníkmi s kružnicami k, l bola rovná dĺžke danej úsečky.
2. Daná je priamka p , kružnica k a úsečka AB v rovine. Zostrojte úsečku PK tak, aby bola rovnobežná a zhodná s úsečkou AB a aby bol bod P z priamky p a K z kružnice k .
- ✎ 3. Na ktorom mieste je potrebné zostrojiť most cez rieku, ktorá oddeľuje dve obce A, B tak, aby cesta z obce A do obce B bola čo najkratšia. Brehy rieky sa predpokladajú navzájom rovnobežné a most má byť postavený kolmo na brehy rieky.
4. Nájdite množinu bodov M , ktorých
- (a) súčet
 - (b) rozdiel
- vzdialeností od dvoch daných rôznobežných priamok p, q je rovný danej konštante a .
- 🏠 5. Dané sú priamky x, y, z a kladné číslo w . Zostrojte také body X, Y po rade na priamkach x, y , aby priamka $\overleftrightarrow{XY}$ bola rovnobežná s priamkou z a dĺžka úsečky sa rovnala číslu w .
6. Dané sú dve tetivy AB, CD kružnice k . Na kružnici k nájdite taký bod X , aby tetivy AX, BX prešli tetivu CD v bodoch E, F , ktorých vzdialenosť je rovná danému kladnému číslu a .
7. Dané sú dve kružnice k, l pretínajúce sa v bodoch A, B . Bodom A zostrojte priamku p tak, aby prešla kružnicu k v bode M a kružnicu l v bode N , ktoré určujú úsečku danej dĺžky.
8. Je daná kružnica k s vyznačeným priemerom PQ a nesečnica p kružnice s vyznačenou úsečkou AB . Zostrojte bod Z kružnice k , ktorý má tú vlastnosť, že priamky $\overleftrightarrow{PZ}, \overleftrightarrow{QZ}$ pretínajú priamku p v bodoch X, Y tak, že úsečka XY je zhodná s úsečkou AB .
- 🏠 9. Dané sú úsečky s dĺžkami a, c, e, f a uhol ω . Zostrojte štvoruholník $ABCD$, v ktorom $|AB| = a, |CD| = c, |AC| = e, |BD| = f$ a uhol ω je zhodný s uhlom $\angle ASB$, kde S je priesečník uhlopriečok.

10. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak je známy uhol priamok $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ a dĺžky všetkých strán štvoruholníka.
- ✎ 11. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané dĺžky všetkých jeho strán.
12. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak poznáte veľkosti jeho strán a veľkosť uhla uhlopriečok, ktorého ramená prechádzajú vrcholmi A, B .
13. Dané sú dve kružnice k, l . Zostrojte priamku p
- (a) rovnobežnú s danou priamkou r tak, aby p vytínala na k a l tetivy rovnakej dĺžky,
 - (b) rovnobežnú s danou priamkou r takú, aby na k a l vytínala tetivy, ktorých súčet (rozdiel) dĺžok je rovný kladnému číslu a ,
- △ (c) prechádzajúcu daným bodom A a takú, ktorá na k, l vytína tetivy rovnakej dĺžky.
14. Je daná kružnica k a úsečka KL . Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ vpísaný do kružnice tak, aby úsečky AB a KL boli rovnobežné a zhodné.
15. Dané sú dva páry rovnobežiek a bod P . Bodom P vedťe priamku, ktorá pretína rovnobežky v zhodných úsečkách.
16. Označme $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d, |AC| = e, |BD| = f$ a bod M nech je priesečník uhlopriečok. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané
- (a) $e, f, \angle AMB, a$ (resp. b, c, d),
 - (b) $a + c, e, f, \gamma$,
 - (c) $a + c, e, f, \alpha$,
 - (d) $a + c, e, f, d$.

4 Otočenie

1. Dané sú dve priamky p, q , bod T a rovnoramenný trojuholník KLM . Zostrojte rovnoramenný trojuholník TUV s vrcholom v bode T podobný s KLM tak, aby U bol z priamky p a V z priamky q .
2. Daný je štvorec $ABCD$ a úsečka MN . Zostrojte štvorec $XYUV$, ktorého každý vrchol leží na jednej strane štvorca $ABCD$ a strana štvorca XY je zhodná s úsečkou MN .
3. Daná je kružnica k a dva rôzne body P, Q . Zostrojte dve rovnobežky p, q prechádzajúce po rade bodmi P, Q tak, aby pretínali kružnicu k v bodoch X, Y ohraničujúcich štvrtinu kružnice.
4. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC , ktorého vrcholy ležia na
 - (a) troch rôznych rovnobežných priamkach,
 - (b) troch sústredných kružniciach.
5. Dané sú dve sústredné kružnice k, l a bod A ležiaci na jednej z nich. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC , ktorého vrchol B leží na kružnici k a C na l .
6. Dané sú dve sústredné kružnice k, l , bod A a uhol ω . Bodom A zostrojte priamky p, q zvierajúce uhol ω tak, aby kružnice k, l vytínali na nich tetivy navzájom zhodné.
7. Dané sú dve kružnice k, l so spoločným bodom A . Zostrojte štvorec $ABCD$, ktorého vrchol B je z k a D z l .
8. Daná je kružnica k a bod A . Zostrojte tetivu XY kružnice k , ktorá má danú dĺžku a leží na priamke prechádzajúcej bodom A .
9. Daná je kružnica k , bod B a úsečka MN . Zostrojte tetivu XY kružnice k zhodnú s úsečkou MN tak, aby ju bolo vidieť z bodu B pod uhlom 60° .
10. Na stranách ľubovoľného trojuholníka ABC sú zvonku zostrojené rovnostranné trojuholníky. Dokážte, že stredy týchto trojuholníkov sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka. Platí toto tvrdenie aj v tom prípade, keď rovnostranné trojuholníky sú zostrojené v polrovinách, v ktorých leží aj trojuholník ABC ?

11. Dané sú body $A, A_1, B \neq A$. Otáčanie, ktoré zobrazí bod A do bodu A_1 , zobrazí bod B do určitého bodu B_1 . Čo vyplnia body B_1 , ktoré dostaneme všetkými takýmito otáčaniami?
12. Nad stranami ľubovoľného rovnobežníka $ABCD$ sú zvonka zostrojené štvorce. Dokážte, že stredy S_1, S_2, S_3, S_4 týchto štvorcov sú vrcholmi štvorca. Platí toto tvrdenie aj vtedy, ak sú štvorce zostrojené v polrovinách obsahujúcich rovnobežník $ABCD$?
13. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník, K stred úsečky BD a M stred strany EF . Dokážte, že trojuholník AMK je rovnostranný.
14. Daný je rovnobežník $ABCD$. Zostrojte štvorec $KLMN$, aby body K, L, M, N ležali po rade na stranách AB, BC, CD, AD .

5 Stredová súmernosť

- ✎ 1. Dané sú dve priamky p, q a bod F . Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom F tak, aby A bol z priamky p a C z q .
2. V rovine je daná priamka p , kružnica k a bod Q . Zostrojte úsečku XY tak, aby X ležal na p , Y na k a Q bol stredom úsečky XY .
- ✎ 3. Daná je priamka p , kružnica k a body S, O navzájom rôzne. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby A ležal na p , B na k a S, O boli po rade stredmi strán AC, BC .
- 🏠 4. Zostrojte trojuholník ABC , ak poznáte c, t_a a uhol medzi t_a, b .
- ✎ 5. Zistite, čo vznikne zložením dvoch stredových súmerností alebo stredovej súmernosti a posunutia.
- ✎ 6. Dokážte, že zložením nepárneho počtu stredových súmerností vznikne stredová súmernosť, ale zložením párneho počtu stredových súmerností vznikne posunutie alebo identita.
- ✎ 7. Na základe predchádzajúceho príkladu riešte: Zostrojte päťuholník, ak poznáte stredy jeho strán M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 .
8. Spoločným bodom dvoch kružníc k, l zostrojte priamku p , ktorá vytína na kružniciach zhodné tetivy.
- ✎ 9. Vonkajším bodom A danej kružnice k veďte priamku, ktorá pretína danú kružnicu v bodoch P, Q tak, že úsečky AP a PQ sú zhodné.
10. Daný je rovnobežník $ABCD$. Na jeho stranách sú dané body A_1, B_1, C_1, D_1 tak, aby $A_1B_1C_1D_1$ bol rovnobežník. Dokážte, že stredy týchto rovnobežníkov sú totožné.
11. Daný je trojuholník PCQ a vnútri tohto trojuholníka bod T . Zostrojte trojuholník ABC tak, aby T bol jeho ťažiskom, bod A ležal na polpriamke CP a bod B na polpriamke CQ .
- 🏠 12. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané t_a, t_b, t_c .

6 Tálesova veta, obvodový uhol

1. Je daná kružnica k a jej vonkajší bod P . Na sečniciach vedených bodom P vytína kružnica k tetivy. Akú množinu vytvoria stredy týchto tetív?
2. Je daná kružnica k , v nej tetiva AB a vnútorný bod G rôzny od stredu kružnice k . Bodom G vedte v kružnici tetivu, ktorú tetiva AB rozpoľuje. Pre akú polohu bodu G je úloha riešiteľná?
3. Dve kružnice sa pretínajú v bodoch K a L . Bodom K vedte v oboch kružniciach priemery KM , KN . Dokážte, že priamka MN prechádza priesečníkom L .
4. Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k . Os vnútorného a os vonkajšieho uhla pri vrchole A pretína kružnicu k v bodoch U_1 , U_2 . Dokážte, že priamka U_1U_2 je osou strany BC .
5. Kružnici k je opísaný lichobežník $ABCD$. Dokážte, že kružnice zostrojené nad jeho ramenami AD , BC sa dotýkajú v strede kružnice k .
6. Dve zhodné kružnice k_1 , k_2 sa pretínajú v bodoch A , B . Nech sečnica vedená bodom A pretína kružnicu k_1 v bode $M \neq B$ a kružnicu k_2 v bode N ($N \neq B$). Dokážte, že $BM \cong BN$.
- 🏠 7. Nech AB je pevne zvolená tetiva kružnice k rôzna od priemeru. Bod C sa pohybuje po kružnici k . Akú dráhu opisuje priesečník výšok $\triangle ABC$?
8. Dotyčnice ku kružnici k so stredom S vedené z bodu P na tejto kružnici dotýkajú v bodoch T , U . Priamka TS pretína kružnicu v bode H . Dokážte, že $HU \parallel SP$.
9. Vonkajšie spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa ich dotýkajú v navzájom rôznych bodoch. Dokážte, že tieto dotykové body sú vrcholmi tetivového štvoruholníka.

7 Rovnoľahlosť

- ✎ 1. Je daná kružnica $k = k(S, r)$ a bod A , ktorý leží zvonku kružnice. Zostrojte sečnicu kružnice k tak, aby obsahovala bod A , pretínala k v bodoch X, Y a aby platilo $|AX| = 3|AY|$.
2. Je daný trojuholník ABC a bod M ležiaci zvonku trojuholníka. Zostrojte priamku obsahujúcu bod M tak, aby pretála obvod trojuholníka v bodoch X, Y a aby platilo $|MX| = 5|XY|$.
- ✎ 3. Dané sú body A, B, C a rôzne rovnobežky a, b obsahujúce po rade body A, B . Zostrojte priamku prechádzajúcu bodom C tak, aby pretála priamku a v bode X , priamku b v bode Y a aby platilo $|AX| = 2|BY|$.
- 🏠 4. Daný je trojuholník ABC . Zostrojte úsečku XY takú, že $|AX| = |XY| = |YB|$ a $X \in AC, Y \in BC$.
5. Daný je uhol AVB a jeho vnútorný bod M . Zostrojte bod $X \in AV$, ktorého vzdialenosť od VB je dvojnásobkom úsečky XM .
- 🏠 6. Dané sú dve rôznobežky a, b a bod M , ktorý na nich neleží. Zostrojte všetky kružnice, ktoré prechádzajú bodom M a dotýkajú sa priamok a, b .
- 🏠 7. Dané sú dve rôznobežky a, b a kružnica k , ktorá sa nedotýka žiadnej z nich. Zostrojte kružnicu l , ktorá sa dotýka súčasne a, b, k .
- 🏠 8. V rovine je daná kružnica k , priamka p a bod $Q \in p, Q \notin k$. Zostrojte kružnicu l , ktorá sa dotýka kružnice k aj priamky p v bode Q .
9. Daná je kružnica k a jej kod K . Určte množinu všetkých bodov X v rovine, ktoré delia tetivy kružnice k obsahujúce K v pomere 2:5.
10. Zostrojte kosoštvorec, ak poznáte jeho strany a pomer uhlopriečok.
11. Zostrojte trojuholník ABC , ak je dané:
- (a) $b : c = 7 : 4, \alpha = \pi/4, t_b$
 - (b) $a : b = 4 : 5, \gamma = \pi/3, v_c$
 - (c) $a + b, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ$
12. Spojte daný bod M s nedostupným priesečníkom daných priamok a, b .

13. Vedzte daným bodom M rovnobežku s priamkou, ktorá je určená nedostupnými priesečníkmi priamok a, b a c, d .
- ✎ 14. (**Eulerova priamka.**) Daný je trojuholník ABC . Dokážte, že priesečník výšok V , stred opísanej kružnice S a ťažisko T buď splynú v jeden bod alebo ležia na jednej priamke, pričom $(SVT) = -1/2$.
15. Zostrojte trojuholník, ak poznáte
- (a) ťažisko, priesečník výšok, stred jednej strany,
 - (b) ťažisko, priesečník výšok, jeden vrchol,
 - (c) S, V , jeden vrchol.
- ✎ 16. (**Feuerbachova kružnica.**) Dokážte, že kružnica, ktorá prechádza stredmi strán trojuholníka, obsahuje aj päty výšok trojuholníka a stredy úsečiek určených vrcholmi trojuholníka a priesečníkom výšok. Táto kružnica má polovičný polomer ako kružnica opísaná trojuholníku a nazýva sa kružnica deviatich bodov. Stred kružnice deviatich bodov je stredom úsečky určenej priesečníkom výšok a stredom kružnice opísanej trojuholníku.
- ✎ 17. Do daného ostrouhlého trojuholníka ABC vpíšte štvorec tak, aby jeho dva susedné vrcholy ležali na strane AB a ďalšie dva vrcholy postupne na stranách AC, BC .
18. Dané sú dve pretínajúce sa kružnice. Jedným ich spoločným bodom vedzte takú priamku, ktorá vytína na kružniciach tetivy s pomerom 3:2.
- 🏠 19. Daná je kružnica $k = k(S, r)$ s priemerom AB . Nech C je bod kružnice k rôzny od A, B . Na polpriamke $\overrightarrow{BC}$ určte bod D tak, aby C bol stredom úsečky BD . Nech X je priesečník AC, SD . Popíšte geometrický lokus bodov X , ak bod C sa pohybuje po kružnici k .
20. V rovine sú dané štyri body A, B, S, O . Zostrojte kružnicu k prechádzajúcu bodmi A, B a kružnicu l so stredom S tak, aby O bol ich stredom rovnoláhlosti. (Prevedzte diskusiu.)
- 🏠 21. Daná je kružnica k a jej navzájom kolmé priemery. Zostrojte tetivu kružnice k , ktorú dané priemery rozdeľujú na tri zhodné úsečky.
22. Do daného rovnobežníka $ABCD$ vpíšte kosoštvorec $MNPQ$ tak, aby $MN \parallel AC, PN \parallel BD, M \in AB$.

23. Daná je kružnica k a jej body A, B, C . Zostrojte tetivu AX kružnice k tak, aby z nej jej priesečník Y s tetivou BC oddelil štvrtinu.

24. Daný je trojuholník ABC . Nech M je ľubovoľný bod strany BC a P, Q sú priesečníky výšok trojuholníka ABM a trojuholníka ACM (v tomto poradí). Dokážte, že potom trojuholník MPQ je podobný s trojuholníkom ABC .

8 Podobnosť

1. V ostrouhlom trojuholníku ABC sú zostrojené výšky AA_1 a BB_1 . Dokážte, že platí: $A_1C : B_1C = AC : BC$.

2. Základne lichobežníka majú dĺžky a, c .

(a) Nájdite dĺžku úsečky vytatej uhlopriečkami na strednej pričke.

(b) Nájdite dĺžku úsečky, ktorú vytínajú ramená lichobežníka na priamke prechádzajúcej priesečníkom uhlopriečok rovnobežne s jeho základňami.

3. Dokážte, že stredy strán ľubovoľného štvoruholníka sú vrcholmi rovnobežníka. Pre aký štvoruholník je tento rovnobežník pravouholníkom, kosoštvorcom, štvorcom?

4. Nech V je priesečník výšok v trojuholníku ABC , ktorý nie je pravouhlý, a A_1, B_1, C_1 päty výšok prechádzajúcich po poriadku vrcholmi A, B, C . Dokážte, že platí: $|AV| \cdot |A_1V| = |BV| \cdot |B_1V| = |CV| \cdot |C_1V|$

5. Nech S je obsah trojuholníka ABC a nech s je jeho polovičný obvod. Nech r je polomer kružnice trojuholníku vpísanej a táto nech sa dotýka strany BC v bode G_a . Nech ďalej r_a, r_b, r_c sú polomery zvonku pripísaných kružníc. Kružnica pripísaná trojuholníku pri strane BC sa jej dotýka v bode N_a .

(a) $|CG_a| = |BN_a| = s - c$,

(b) $S = (s - a) \cdot r_a$,

(c) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

6. Dokážte, že priesečník uhlopriečok a priesečník ramien lichobežníka ležia na priamke prechádzajúcej stredmi jeho podstav.

7. Nech AA_1, BB_1 sú výšky trojuholníka ABC . Dokážte, že trojuholník A_1B_1C je podobný s trojuholníkom ABC .

8. Dokážte, že výšky AA_1, BB_1, CC_1 ostrouhlého trojuholníka ABC sú osami uhlov trojuholníka $A_1B_1C_1$.

9. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku platí:

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

kde v_a, v_b, v_c, a, b, c sú dĺžky príslušných úsečiek.

10. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku ABC delí os vnútorného uhla protilahlú stranu na úsečky úmerné prilahlým stranám.

9 Rôzne

1. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané

- (a) t_c, v_a, v_c ,
- (b) t_b, γ, c ,
- (c) t_c, v_a, β ,
- (d) t_a, α, v_b ,
- (e) t_a, b, α ,
- (f) t_a, t_b, t_c , (je aj v časti Stredová súmernosť)
- (g) t_b, c, a .
- (h) t_a, t_b, γ ,

2. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC , ak poznáte dĺžku ťažnice t_b a výšky v_b .

3. V rovine je daná priamka p , kružnica so stredom S a polomerom r a kladné číslo R . Zostrojte kružnicu k s polomerom R , ktorá sa dotýka priamky p a kružnice (S, r) .

4. V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1. Určte v rovine množinu $\mathcal{M}$, ktorú vyplnia tretie vrcholy všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

5. Nech C je bod vnútri štvorca $ABDE$ taký, že $\triangle CDE$ je rovnoramenný a jeho uhly pri vrchoch D a E majú 15° . Čo za trojuholník je $\triangle ABC$?

6. Nech P leží vnútri rovnostranného trojuholníka. Ukážte, že súčet vzdialeností bodu P od strán trojuholníka nezávisí od polohy P .

7. (**Švrčkove body.**) V $\triangle ABC$ nech o_a označuje os strany BC a o_α nech je os $\angle CAB$. Ak o_a a o_α sú rôzne priamky, potom sú rôznobežné a ich priesečník leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC . Dokážte.

8. (**Ortický trojuholník.**) Nech $\triangle ABC$ nie je pravouhlý. Nech A_1, B_1, C_1 sú po rade päty výšok $\triangle ABC$ z vrcholov A, B, C . Ukážte, že $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$, $\triangle A_1B_1C$ sú podobné trojuholníku ABC .

9. Výšky ostrouhlého trojuholníka sú osami uhlov jeho ortického trojuholníka. Čo viete povedať v prípade, keď je daný trojuholník tupouhlý?

△ 10. Feuerbachova kružnica (t.j. kružnica opísaná ortickému trojuholníku daného trojuholníka) sa dotýka vpísanej aj pripísaných kružníc daného trojuholníka.

11. (**Ortocentrický systém / ortocentrická štvorica bodov.**) Nech V je ortocentrum trojuholníka ABC . Overte nasledovné tvrdenia:

- (a) Ľubovoľný z bodov A, B, C, V je ortocentrom trojuholníka tvoreného zvyšnými troma bodmi.
- (b) Ak $\triangle ABC$ nie je pravouhlý, tak úsečka určená ľubovoľnou dvojicou z bodov A, B, C, V je kolmá na úsečku určenú dvojicou zvyšných bodov.
- (c) Nech A, B, C, V je ortocentrická štvorica bodov. Trojuholníky ABC , ABV , ACV , BCV majú spoločný ortický trojuholník a tým aj Feuerbachovu kružnicu.

12. Nech I je stred vpísanej kružnice ľubovoľného trojuholníka ABC a $I_a I_b I_c$ sú stredy tomuto trojuholníku pripísaných kružníc. Dokážte:

- (a) Body $I, I_a I_b I_c$ tvoria ortocentrický systém.
- (b) Ortickým trojuholníkom trojuholníkov $I_a I_b I_c, I I_b I_c, I I_a I_c, I I_a I_b$ je trojuholník ABC .

13. (**Simsonova-Walaceova priamka.**) Nech bod P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC . Nech A' je päta kolmice z bodu P na stranu BC , podobne B' resp. C' nech je päta kolmice z bodu P na stranu CA resp. AB . Ukážte, že ak P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC , potom sú body A', B', C' kolineárne.

14. (**Fermatov / Fermatov–Torricelliho bod.**) Nech všetky uhly v $\triangle ABC$ sú väčšie ako 120° . Nájdite v rovine taký bod F , pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od vrcholov $\triangle ABC$ minimálny.

15. (**Morleyova veta.**) V ľubovoľnom trojuholníku ABC nech a_B, a_C sú polpriamky rozdeľujúce vnútorný uhol pri vrchole A na tri zhodné uhly, kde polpriamka a_B je bližšie k vrcholu B , polpriamka a_C zas bližšie k vrcholu C ; podobne b_A, b_C resp. c_A, c_B pre vrcholy B resp. C . Nech $X = b_C \cap c_B$, $Y = a_C \cap c_A$, $Z = a_B \cap b_A$. Potom $\triangle XYZ$ je rovnostranný. Dokážte.