

4 Kvadratické formy

4.1 Regulárne kužeľosečky v euklidovskej rovine

4.1.1 Kružnica

Je daná stredom $S \in \mathbb{E}^2$ a polomerom $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ako množina bodov, ktorých vzdialenosť od stredu S je r :

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XS| = r\}.$$

Z tejto definície potom už ľahko odvodíme rovnicu kružnice. V špeciálnom prípade, ak $S = (0, 0)$, tak bod $X = (x, y)$ leží na kružnici práve vtedy, keď $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Túto rovnosť štandardne upravujeme tak, aby sme sa vyhli odmocnine. Dostávame tak **implicitnú rovnicu kružnice**, t.j. čosi ako všeobecnú rovnicu:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pri hľadaní rovnice pre kružnicu so stredom v ľubovoľnom bode $S = (m, n)$ môžeme uvažovať dvoma spôsobmi:

- (a) Priamo z definície kružnice musí pre bod kružnice platiť, že

$$\begin{aligned} |(x, y)(m, n)| &= r \\ \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} &= r \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ak to nie je pre nejaké následné výpočty potrebné, rovnicu pre prehľadnosť nechávame v tomto tvare, neroznásobujeme.

- (b) Kružnicu môžeme vnímať aj ako kružnicu so stredom v začiatku súradníc, pokiaľ si súradnice vhodne zvolíme. Zvoľme začiatok súradníc v strede kružnice a jednotkové vektory v smere súradnicových osí ponecháme bezo zmeny. Pôvodné súradnice (x, y) sú tak s našimi pomocnými súradnicami (x', y') previazané posunutím:

$$\begin{aligned} x' &= x - m, \\ y' &= y - n. \end{aligned}$$

Ak má teda kružnica v pomocných súradniciach rovnicu

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

tak v pôvodných súradniciach má táto kružnica rovnicu

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Príklad 4.1. Akú kružnicu popisuje rovnica

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 4y + 12 = 0?$$

4.1.2 Elipsa

Je daná dvoma ohniskami F_1, F_2 a kladným reálnym číslom a , pre ktoré navyše musí platiť $2a > |F_1, F_2|$. Elipsa je definovaná ako množina takých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od ohnisk je konštantná. Presnejšie:

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}.$$

Pre odvodenie implicitnej rovnice elipsy (t.j. rovnice, ktorú spĺňajú presne body elipsy) vložíme vhodným spôsobom situáciu do súradnicovej sústavy. Popritom sa zoznámime s terminológiou zviazanou s elipsou:

- $e = 1/2|F_1F_2|$ je **excentricita** elipsy,
- $S = 1/2(F_1 + F_2)$ je **stred** elipsy,
- priamka $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ je **hlavná os** elipsy,
- priamka cez stred S kolmá na hlavnú os je **vedľajšia os** elipsy,
- **vrcholy** elipsy sú jej priesečníky s osami; priesečníky s hlavnou osou sú **hlavné vrcholy**, priesečníky s vedľajšou osou sú **vedľajšie vrcholy**.

Lahko nahliadneme, že vzdialenosť hlavného vrchola od stredu elipsy je a , hovoríme tiež o **dĺžke hlavnej poloosi**. Podobne vzdialenosť vedľajšieho vrchola od stredu elipsy nazývame **dĺžka vedľajšej poloosi** a označujeme b . Medzi dĺžkami poloosí a excentricitou je vzťah

$$a^2 = b^2 + e^2. \quad (11)$$

Zvolíme teraz súradnice tak, že stred elipsy je v začiatku súradníc a ohniská ležia na x -osi, teda

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$$

a konečne môžeme pristúpiť k odvodeniu rovnice elipsy. Bod $X = (x, y)$ leží na elipse práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} |(x, y)(-e, 0)| + |(x, y)(e, 0)| &= 2a \\ \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Trpezlivými a pozornými úpravami (dvakrát treba rovnicu umocniť, využiť vzťah (11)) sa nakoniec dopracujeme ku kvadratickej rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

nazývame ju tiež **kanonická rovnica** elipsy. Ak by sme chceli zapísať rovnicu elipsy so stredom v bode $S = (m, n)$, hlavnou osou rovnobežnou s x -osou, na základe úvah vykonaných pri kružnici len urobíme posunutie a dostaneme

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

4.1.3 Hyperbola

Definuje sa veľmi podobne ako elipsa. Je tiež daná dvoma ohniskami F_1, F_2 a kladným reálnym číslom a , no v prípade hyperboly sa vyžaduje, aby $2a < |F_1 F_2|$. Zodpovedajúca hyperbola je potom množina takých bodov roviny, ktorých rozdiel vzdialeností od ohnisk je konštantná:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid ||XF_1| - |XF_2|| = 2a\}.$$

Znovu **vrcholy hyperboly** sú jej priesečníky s priamkou $\overleftrightarrow{F_1 F_2}$. Vzdialenosť vrchola od stredu hyperboly je a . Dĺžku $b \in \mathbb{R}^+$ môžeme definovať vzťahom

$$e^2 = a^2 + b^2. \quad (12)$$

Ohniská vložíme do súradnicovej sústavy presne ako u elipsy: $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ a pre body hyperboly dostaneme kanonickú rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hyperbola, ktorej stred bude posunutý do body (m, n) bude mať rovnicu

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

4.1.4 Parabola

Parabola je určená **ohniskom** $F \in \mathbb{E}^2$ a **riadiacou priamkou** l tak, aby ohnisko neležalo na riadiacej priamke. Parabola je množina takých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od ohniska je rovnaká ako vzdialenosť od riadiacej priamky:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF| = |Xl|\}. \quad (13)$$

Pre parabolu v kanonickom tvare volíme $F = (0, \frac{p}{2})$ a riadiacu priamku l tak, že jej všeobecná rovnica je $y + \frac{p}{2} = 0$, teda p je vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky. Z metrickej definície paraboly (13) potom dostaneme jej kanonickú rovnicu

$$x^2 = 2py. \quad (14)$$

Ostatné tvary kanonickej rovnice sú $2py = -x^2$, $2px = y^2$, $2px = -y^2$. Pre parabolu v tvare (14) je

- bod $(0, 0)$ **vrcholom paraboly**,
- priamka o_y (t.j. y -os) **osou paraboly**.

Tak ako v prípade elipsy a hyperboly, posunutím paraboly (14) tak, že jej vrchol sa posunie do bodu (m, n) sa implicitná rovnica paraboly zmení na

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$

Príklad 4.2. Zistite, akú parabolu popisuje rovnica

$$y^2 + 2x - 2y - 3$$

t.j. nájdite jej vrchol, ohnisko, riadiacu priamku.

4.1.5 Kuželošečky v rovine, všeobecnejšie

Rovnice všetkých doteraz skúmaných kuželošiek boli kvadratickými rovnicami, v ktorých sa okrem absolútneho a lineárnych členov vyskytovali ešte členy s monómami x^2 a y^2 . Rovnica kuželošečky mala teda tvar

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0.$$

Typ kuželošečky, teda či ide o elipsu, hyperbolu alebo parabol, závisí od kvadratických koeficientov.

Príklad 4.3. Uvažujme parabol $y = x^2$. Zmeňme súradnicovú sústavu tak, že začiatok sústavy ponecháme v $(0, 0)$ a novými súradnicovými vektormi budú

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Rovnica našej paraboly v novej súradnicovej sústave potom bude

$$x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0.$$

Vidíme, že kvadratická rovnica už obsahuje aj zmiešaný kvadratický člen.

Všeobecne rovnica kuželošečky má tvar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (15)$$

Bude veľmi užitočné zapisovať túto rovnicu maticovo:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Vidíme, že kuželosečku popísanú rovnicou (15) vieme reprezentovať symetrickou maticou stupňa 3.

Pre danú rovnicu (15) by sme chceli zistiť, či ide o rovnicu kuželosečky, a ak áno, aký typ kuželosečky rovnica reprezentuje. Vyčítať to priamo z rovnice (15) už nie je také priamočiare ako v prípade, keď jej rovnica neobsahuje zmiešaný člen. Zmiešaný člen sa v rovnici nachádza vtedy, keď osi kuželosečky nie sú rovnobežné so súradnicovými osami. Snažíme sa preto aplikovať afinnú transformáciu (alebo ekvivalentne: zmeniť súradnicovú sústavu) tak, aby sme sa zmiešaného člena v rovnici zbavili.

4.2 Diagonalizácia kvadratickej formy

4.2.1 Kvadratické formy a symetrické matice

Definícia 4.4. Nech k je pole ($\text{char } k \neq 2$). Potom n -árna kvadratická forma nad k je homogénny polynóm stupňa 2 o n premenných:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{ij} \in k/$$

Kvadratickú formu tiež chápeme ako zobrazenie $k^n \rightarrow k$

Príklad 4.5. • $q(x) = ax^2$ – unárna kvadratická forma,

• $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ – binárna kvadratická forma,

• $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ – ternárna kvadratická forma,

•

Príklad 4.6. Kvadratický polynóm $ax^2 + bx + c$ nie je kvadratická forma! Podobne polynóm v rovnici pre kuželosečky,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

nie je kvadratická forma, ale dá sa z neho homogenizáciou kvadratická forma vyrobiť:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2. \quad (16)$$

Naspäť k rovnici kuželosečky sa dostaneme dosadením 1 za premennú z .

Kvadratickú formu (16) vieme zapísať aj v maticovom tvare:

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 4.7. Ku každej n -árnej kvadratickej forme $q = q(x_1, \dots, x_n)$ existuje práve jedna symetrická matica A stupňa n taká, že

$$q(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

a naopak, každá symetrická matica zodpovedá kvadratickej forme.

Dôkaz. Nech $q = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j$. Položme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j.$$

Ide o rovnosť kvadratických foriem. Splnená bude práve vtedy, keď na pravej aj na ľavej strane sú pri rovnakých monómoch rovnaké koeficienty.

Po roznásobení na ľavej strane tejto rovnosti máme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Vidíme, že koeficienty a_{ij} sú jednoznačne určené koeficientami c_{ij} a naopak. $\square$

Kvadratickú formu q sme nahradili symetrickou maticou A . Táto matica je podľa práve dokázanej vety jednoznačne určená. Teraz chceme maticu A kvadratickej formy diagonalizovať, t.j. chceme voľbou vhodnej bázy priestoru k^n eliminovať a_{ij} pre $i < j$.

4.2.2 Metóda 1: Lagrangeova

Pri diagonalizácii kvadratickej formy touto metódou používame dva typy úprav:

- úprava na úplný štvorec: substitúcia typu

$$ax_i^2 + bx_i x_j = a \left(x_i + \frac{b}{2a} x_j \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} x_j^2 = ax_i'^2 - \frac{b^2}{4a^2} x_j^2,$$

- ak člen $x_i x_j$ nie je možné eliminovať predchádzajúcou substitúciou (lebo forma neobsahuje člen s monómom x_i^2 ani x_j^2), použijeme úpravu

$$x_i x_j = \frac{1}{4}(x_i + x_j)^2 - \frac{1}{4}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{4}x_i'^2 - \frac{1}{4}x_j'^2.$$

Príklad 4.8. Diagonalizujme kvadratickú formu $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4,$$

t.j. jej matica je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Používame Lagrangeovu metódu:

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -2(x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - x_2x_3) - 3x_3x_4 \\ &= -2((x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 - (\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2) - 3x_3x_4 \\ &= -2(x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(-x_1 + 4x_2 - 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1^2 + 4x_1x_3) + \frac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(-x_1 + 4x_2 - 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(-x_1 + 4x_2 - 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - \frac{3}{4}(x_3 + x_1) + \frac{3}{4}(x_3 - x_1)^2 \end{aligned}$$

Vidíme, že po substitúcii (t.j. v novej báze $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= x_1 + 2x_3 \\ x_3' &= x_3 + x_4 \\ x_4' &= x_3 - x_4 \end{aligned}$$

je kvadratická forma q diagonálna:

$$q = -\frac{1}{8}x_1'^2 + \frac{1}{8}x_2'^2 - \frac{3}{4}x_3'^2 + \frac{3}{4}x_4'^2.$$

Celý proces môžeme elegantne zapísať pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Maticové vyjadrenie formy q v novej báze je tak

$$q = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}.$$

Spolu s (17) potom máme

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} P^T B P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

čiže pre matice A a B platí

$$A = P^T B P.$$

Pozorovanie z tohto príkladu možno zjavne prirodzene zovšeobecniť pre ľubovoľnú kvadratickú formu $q : k^n \rightarrow k$:

Nech $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sú dve bázy priestoru k^n a nech $\mathbf{x}' = P\mathbf{x}$. Nech ďalej A resp. B je matica kvadratickej formy q vzhľadom na bázu $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{x}'$. Potom $A = P^T B P$.

Naopak, nech A a B sú symetrické matice stupňa n . Nech existuje regulárna štvorcová matica stupňa n taká, že $A = P^T B P$. Potom A a B sú matice tej istej kvadratickej formy vzhľadom na dve rôzne bázy, pričom P je maticou prechodu medzi týmito dvoma bázami.

Definícia 4.9. Štvorcové matice A a B stupňa n sa nazývajú **kongruentné** ($A \equiv B$), ak existuje regulárna štvorcová matica P taká, že $A = P^T B P$.

Úvahami spred definície sme dokázali tvrdenie:

Tvrdenie 4.10. Symetrické matice A a B stupňa n sú maticami tej istej kvadratickej formy (vzhľadom na možno rôzne bázy) práve vtedy keď sú navzájom kongruentné.

Jednoducho a priamočiaro sa dajú ukázať tieto vlastnosti relácie kongruentnosti matíc:

- Kongruentnosť matíc je reláciou ekvivalencie.
- Ak A je symetrická matica a $A \equiv B$, potom aj B je symetrická matica.

Príklad 4.11. ??? Diagonálna matica, s ktorou je daná symetrická matica kongruentná, nie je jednoznačná: nech $q(x, y) = 10x^2 + 5y^2 - 2xy$.

- (a) $q(x, y) = (9x^2 + y^2 - 6xy) + (x^2 + 4y^2 + 4xy) = (x + 2y)^2 + (3x - y)^2$
- (b) Lagrangeovou diagonalizačnou metódou dostaneme:

$$\begin{aligned} 10x^2 + 5y^2 - 2xy &= 10\left(x^2 - \frac{1}{5}xy\right) + 5y^2 \\ &= 10\left(x - \frac{1}{10}y\right)^2 - \frac{1}{10}y^2 + 5y^2 = 10\left(x - \frac{1}{10}y\right)^2 + \frac{49}{10}y^2. \end{aligned}$$

Máme tak pre tú istú kvadratickú formu tri rôzne symetrické matice, ktoré ju popisujú, vždy v inej báze:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{49}{10} \end{pmatrix}.$$

Tieto matice sú všetky navzájom kongruentné.

4.2.3 Metóda 2: simultánne ekvivalentné úpravy matice

Skúsime teraz diagonalizovať kvadratickú iným postupom. Aby sme sa vyhli zdĺhavému vypisovaniu premenných, formu si hneď reprezentujeme maticou. Maticu budeme modifikovať takými úpravami, aby sme zotrvali v triede kongruencie tejto matice, teda maticu modifikujeme tak, aby po každom kroku bola výsledkom matica, ktorá je kongruentná s danou maticou. To znamená, že ak na matici vykonáme nejakú ekvivalentnú riadkovú úpravu, následne v nej vždy vykonáme tú istú stĺpcovú úpravu: Ak U je regulárna štvorcová matica, potom

- AU je matica, ktorá vznikne z A aplikovaním ekvivalentnej stĺpcovej úpravy „zakódovanej“ v matici U ,
- $U^T A$ je matica, ktorá vznikne z A aplikovaním tej istej istej úpravy.

Zjavne vieme každú maticu diagonalizovať:

- úprava 1. typu: ak $a_{ii} \neq 0$, tak znulujeme všetky a_{ij} a a_{ji} ($i \neq j$) pripočítaním vhodného násobku i -teho stĺpca resp. riadku k j -temu,
- úprava 2. typu: ak pre všetky i také, že $a_{ii} \neq 0$, platí $a_{ij} = a_{ji} = 0$ (inak: už sme úpravou 1. typu znulovali všetko, čo sa dalo), nech i je najmenšie také, že $a_{ii} = 0$ a $a_{ij} \neq 0$ pre nejaké j , potom j -ty riadok pripočítame k i -temu a to isté urobíme so stĺpcami.

Úpravou 2. typu určite „nerozhádžeme“ ľavú hornú $(i-1) \times (i-1)$ podmaticu a v nasledujúcich krokoch už vieme vynulovať všetky prvky v i -tom riadku a stĺpci, okrem diagonálneho. Týmto sme vlastne ukázali:

Tvrdenie 4.12. Každá symetrická matica je kongruentná s nejakou diagonálnou maticou.

Príklad 4.13. Reprezentujme si maticu kvadratickej formy z Príkladu 4.8 maticou a snažme sa ju diagonalizovať práve popísanou metódou.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že sme dostali inú diagonálnu kvadratickú formu ako pomocou Lagrangeovej diagonalizačnej metódy. Vychádza tak prirodzená otázka: čo majú tieto diagonálne kvadratické formy spoločné? Môžeme si všimnúť, že je to počet kladných a záporných čísel na diagonále.

4.3 Sylvestrov zákon zotrvačnosti

Odtiaľ až do konca kapitoly budeme pracovať s kvadratickými formami nad reálnymi číslami.

Definícia 4.14. Nech A je diagonálna matica nad reálnymi číslami. **Signatúra** matice A , ozn. $\sigma(A)$ je trojica (s_+, s_-, s_0) , kde

- s_+ je počet kladných prvkov na diagonále,
- s_- je počet záporných prvkov na diagonále,
- s_0 je počet nulových prvkov na diagonále.

Zrejme hodnota matice A , $h(A) = s_+ + s_-$ a stupeň matice $n = s_+ + s_- + s_0$.

Veta 4.15 ((Sylvestrov zákon zotrvačnosti)). Nech A, B sú diagonálne matice nad $\mathbb{R}$ a nech $A \equiv B$. Potom $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Dôkaz. Nech $A \equiv B$. Riadkové ani stĺpcové ekvivalentné úpravy nemenia hodnotu matice, preto $h(A) = h(B) = h$. Označme

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= (k, h - k, n - h), \\ \sigma(B) &= (l, h - l, n - h).\end{aligned}$$

Potrebuje ukázať, že $k = l$.

Poradie prvkov na diagonále vieme úpravami zachovávajúcimi kongruentnosť zmeniť, preto bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

$$\begin{aligned}A &= \text{diag}(a_1, \dots, a_k, -a_{k+1}, \dots, -a_h, 0, \dots, 0), \quad a_i > 0, \\ B &= \text{diag}(b_1, \dots, b_l, -b_{l+1}, \dots, -b_h, 0, \dots, 0), \quad b_i > 0.\end{aligned}$$

Keďže matice A a B sú kongruentné, platí $B = P^T A P$ pre nejakú regulárnu maticu P . Stĺpce matice P tvoria bázu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$.

Matica A je maticou kvadratickej formy v štandardnej báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a matica B je maticou tej istej kvadratickej formy vzhľadom na bázu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Nech S je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$ generovaný vektormi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ a nech T je podpriestor generovaný vektormi $\mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. Potom pre všetky nenulové vektory $\mathbf{x} \in S$ platí $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$. Na druhej strane pre všetky vektory $\mathbf{y} \in T$ platí $\mathbf{y}^T B \mathbf{y} \leq 0$. Priestory S a T majú preto spoločný iba nulový vektor. Odtiaľ

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T = k + (n - l) \leq n,$$

preto $k \leq l$. Analogicky ukážeme, že $l \leq k$. □

Definícia 4.16. Nech A je symetrická matica nad $\mathbb{R}$. **Signatúra** matice A , ozn. $\sigma(A)$ je signatúra diagonálnej matice, s ktorou je A kongruentná.

Dôsledok 4.17. Nech A, B sú symetrické matice rovnakého stupňa nad $\mathbb{R}$. Matice A a B sú kongruentné práve vtedy, keď $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Dôkaz. Každú symetrickú maticu vieme vhodnou zmenou bázy upraviť na takú diagonálnu maticu, v ktorej sa zhora nachádzajú na diagonále najprv kladné prvky, potom záporné a na záver nulové. Nad reálnymi číslami môžeme s úpravami pokračovať tak, že kladné prvky nahradíme jednotkami a záporné mínus jednotkami. Zrejme každej symetrickej matici nad $\mathbb{R}$ zodpovedá práve jedna takáto diagonálna matica. □

(Ako by situácia vyzerala, keby sme uvažovali formy nad komplexnými číslami?)

Definícia 4.18. Kvadratická forma $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva

- **kladne definitná**, ak $q(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} \neq 0$,
- **kladne semidefinitná**, ak $q(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- **záporne definitná**, ak $q(\mathbf{x}) < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} \neq 0$,
- **záporne semidefinitná**, ak $q(\mathbf{x}) \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- **indefinitná**, ak $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \ q(\mathbf{x}) > 0, q(\mathbf{y}) < 0$.

Symetrická matica sa tiež nazýva kladne definitnou, ak kvadratická forma, ktorú reprezentuje, je kladne definitná, analogicky pre ostatné prípady definitnosti.

Diagonálna matica A je zjavne kladne definitná, ak $\sigma(A) = (n, 0, 0)$. Podobne vieme charakterizovať aj ostatné prípady definitnosti.

Stojíme teraz ešte pred výzvou: ako zistiť definitnosť akejkoľvek symetrickej matice bez toho, aby sme ju upravovali na diagonálny tvar?

Príklad 4.19. Nech A je symetrická matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Hodnota kvadratickej formy q určenej touto maticou v jednotkových vektorech je

$$\begin{aligned} q(1, 0) &= a_{11} \\ q(0, 1) &= a_{22}. \end{aligned}$$

Aby bola táto kvadratická forma kladne definitná, nutne musí platiť, že a_{11} aj a_{22} sú kladné čísla. Avšak vidíme, že tieto podmienky nie sú postačujúce: ak napríklad $a_{11} = a_{22} = 2$ a $a_{12} = -2$, pre vektor $(1, 1)$ máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

Skúsme nájsť aj postačujúcu podmienku kladnej definitnosti pre maticu stupňa 2. Potrebujeme, aby pre maticu (18) platilo

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} ((x, y) \neq (0, 0))$$

t.j. $a_{11} \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x}{y} + a_{22} > 0$.

Toto je zjavne ekvivalentné podmienke, že diskriminant kvadratickej rovnice je záporný a súčasne $a_{11} > 0$ alebo inak:

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det A > 0.$$

Veta 4.20 (Sylvestrovo kritérium kladnej definitnosti). Nech A je symtrická matica stupňa n nad $\mathbb{R}$. Matica A je kladne definitná práve vtedy, keď všetky vedúce hlavné minory matice A sú kladné.

Dôkaz. Nech A je kladne definitná. Indukciou ukážeme, že jej vedúce hlavné minory sú kladné.

Pre $n = 1$ je tvrdenie zjavne pravdivé. (V predchádzajúcom príklade sme si ho dokázali dokonca pre $n = 2$.)

Nech je tvrdenie pravdivé pre $n - 1$. Ak $\mathbf{e}_1$ je prvý báзовý vektor, z podmienky $\mathbf{e}_1^T A \mathbf{e}_1 > 0$ máme, že $a_{11} > 0$. Pripočítaním vhodného násobku prvého riadku k ostatným (t.j. nahradením matice A maticou $P^T A$; P je vhodná regulárna matica) vynulujeme v prvom stĺpci všetky položky pod a_{11} . Potom prevedieme tie isté stĺpcové úpravy (t.j. maticu $P^T A$ nahradíme maticou $P^T A P$). Namiesto pôvodnej matice A máme teraz s ňou kongruentnú maticu

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B' \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Matice A a B majú tie isté vedúce hlavné minory, pretože žiadna z prevedených úprav nezmenila determinant matice a dokonca ani determinant hlavných podmatíc. Keďže $A \equiv B$, je aj matica B kladne definitná. Potom ale aj jej podmatica B' je nutne kladne definitná. Z indukčného predpokladu sú potom všetky vedúce hlavné minory matice B' kladné. Keďže vedúce hlavné minory matice B (a teda aj matice A) sú a_{11} -násobkami vedúce hlavných minorov matice B' , sú aj vedúce hlavné minory matice A kladné.

Pre opačnú implikáciu predpokladajme teraz, že A má všetky vedúce hlavné minory kladné. Odtiaľ potom $a_{11} > 0$, keďže ide o prvý minor. Aj teraz maticu A nahradíme kongruentnou maticou B (19) s rovnakými minormi. Keďže podľa predpokladu druhý minor $a_{11}(B')_{11}$ je kladný, platí, že $(B')_{11} > 0$, a pomocou tohto prvku znulujeme všetky prvky nachádzajúce sa v druhom stĺpci pod diagonálou, podobne pre druhý riadok. Vidíme, že ak pokračujeme v diagonalizácii matice A , dopracujeme sa nakoniec k diagonálnej matici, ktorá bude mať na diagonále iba kladné čísla, a teda je kladne definitná. $\square$

Analogicky môžeme charakterizovať zápornú definitnosť: matica A je záporne definitná, ak pre jej vedúce hlavné minory platí

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$$

Semidefinitnosť a indefinitnosť už takto jednoznačne testovať nevieme. Pre nájdenie signatúry takej matice je naozaj vhodné siahnuť po diagonalizácii.

4.4 Kvadratické formy pri skúmaní priebehu funkcie dvoch premenných

Z analýzy už viete, že pri skúmaní vlastností funkcie viacerých premenných sú zaujímavými tzv. kritické body. V nich funkcia môže (ale nemusí) nadobudnúť extrém. Pre rozhodovanie, či ide o extrém a ak áno, o aký (maximum vs. minimum) sú veľmi užitočné naše práve nadobudnuté vedomosti o kvadratických formách. Postup, ktorý poznáte z analýzy, si teraz osvetlíme z hľadiska geometrie. Zaoberať sa budeme funkciou dvoch premenných.

Analytická funkcia je vo zvolenom bode (x_0, y_0) aproximovaná Taylorovým polynómom:

$$\begin{aligned} T_f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \\ & + \dots \end{aligned} \tag{20}$$

Čím vyšší stupeň polynómu zvolíme, tým lepšie bude polynóm funkciu aproximovať. Polynóm stupňa 0, t.j. konštanta, bude mať v skúmanom bode s danou funkciou spoločnú funkčnú hodnotu. Ak aproximujeme lineárnym polynómom, bude mať tento polynóm s funkciou v skúmanom bode spoločnú nielen funkčnú hodnotu, ale ich grafy budú mať v tomto bode spoločnú aj dotykovú rovinu. Ešte lepšiu aproximáciu poskytuje Taylorov polynóm druhého stupňa: tu už z polynómu vyčítame nielen, či funkcia v tom-ktorom smere rastie či klesá, ale aj ako sa jej rast či klesanie zrýchľuje alebo spomaľuje, t.j. ako sa jej graf v okolí tohto bodu ohýba. Exaktnejšie povedané, grafy funkcie a jej aproximácie Taylorovým rozvojom druhého stupňa majú v danom bode spoločnú nielen dotykovú rovinu ale aj krivosti v rôznych smeroch. Toto je už dostatočná informácia pre rozhodnutie, či v tomto bode má funkcia extrém.

Pri hľadaní extrémov funkcie f dvoch premenných postupujeme takto:

1. Nájdeme kritické body funkcie f , t.j. také body (x_0, y_0) , pre ktoré

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Sú to body, v ktorých je dotyková rovina grafu funkcie vodorovná.

2. V každom kritickom bode aproximujeme funkciu polynómom druhého stupňa a na základe tohto polynómu rozhodneme, či ide o extrém funkcie, a ak áno, aký je to extrém.

Rozoberieme ešte trochu druhý krok tohto postupu. Pre pohodlnejšiu manipuláciu transformujeme súradnice tak, že začiatok súradnicovej sústavy posunieme do bodu $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a z -súradnicu naškálujeme, aby sme sa zbavili faktora $1/2$ v rozvoji. Máme tak nové súradnice $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - x_0, \\ \tilde{y} &= y - y_0, \\ \tilde{z} &= 2(z - f(x_0, y_0)).\end{aligned}$$

Rozvoj (20) druhého stupňa v nových súradniciach bude potom vyzeráť:

$$\tilde{z} = d_{20}\tilde{x}^2 + 2d_{11}\tilde{x}\tilde{y} + d_{02}\tilde{y}^2,$$

kde d_{ij} sú hodnoty parciálnych derivácií, ako sme ich vypočítali v (20). Funkcia je po vhodnej voľbe súradníc teda aproximovaná kvadratickou formou, a o tejto už vieme ľahko rozhodnúť, či nadobúda v $(0, 0)$ (ostré) maximum resp. minimum – bude to práve vtedy, keď je kvadratická forma negatívne resp. pozitívne definitná. Definitnosť formy v tomto prípade najlepšie rozhodneme pomocou Sylvestrovho kritéria.

Definícia 4.21. Nech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je funkcia, ktorá má všetky druhé derivácie. **Hessián** funkcie f je štvorcová matica

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Hessián je teda vo vhodnej súradnicovej sústave matica kvadratickej formy, ktorá najlepšie aproximuje funkciu v skúmanom kritickom bode.