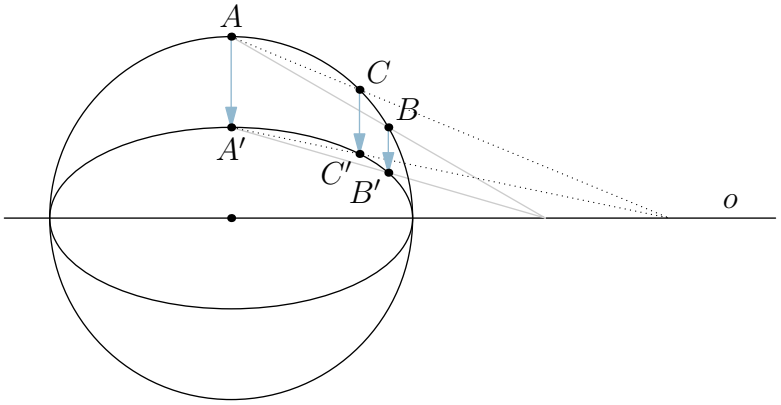
1. Elipsa ako afinný obraz kružnice

1.1. Obraz kružnice v kolmej osovej afinite. Uvažujme

- kolmú osovú afinita f,
- kružnicu k, ktorej stred leží na osi afinity f.

Obraz kružnice k v afinite f nazývame **elipsou**.

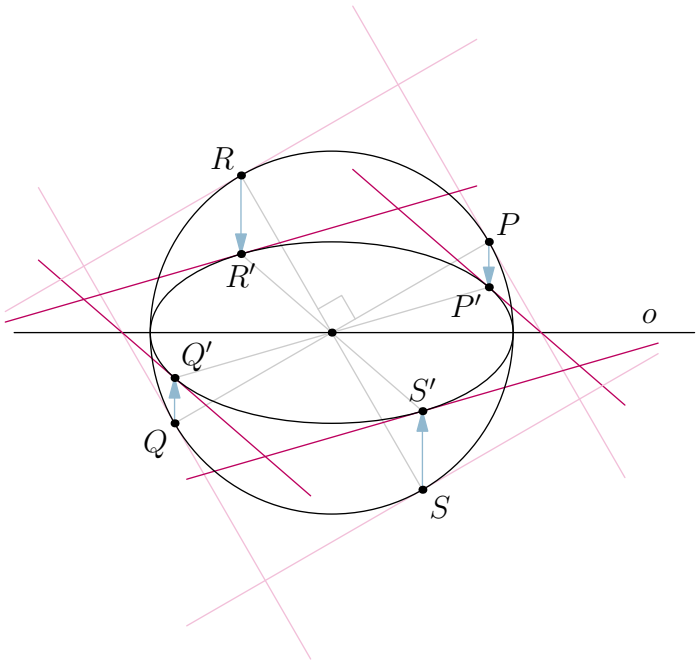
Príklad 1.1. Kolmá afinita s charakteristikou 1/2.



Základné pojmy spojené s elipsou:

- **tetiva** elipsy je úsečka spájajúca dva body elipsy,
- **stred** elipsy je obraz stredu kružnice v príslušnej afinite; keďže afinita zachováva deliaci pomer, t.j. stred úsečky zobrazuje na stred úsečky, je stred elipsy aj jej stredom súmernosti,
- **priemer** elipsy je tetiva prechádzajúca stredom elipsy, ide teda o obraz priemeru kružnice,
- **hlavná os** je najdlhší priemer elipsy, ide o tetivu spájajúcu **hlavné vrcholy** elipsy, úsečka spájajúca stred a hlavný vrchol je **hlavná poloos**, jej dĺžka sa štandardne označuje a; analogicky **vedľajšia os** je najkratší priemer elipsy, spája **vedľajšie vrcholy** a pozostáva z dvoch **vedľajších poloosí**, dĺžka vedľajšej poloosi sa šandardne označuje b; pre konštrukciu elipsy je vždy dôležité poznať jej hlavnú a vedľajšiu os.

Dôležitým prvkom pri konštruovaní elipsy sú **združené priemery elipsy**, čo sú obrazy dvojice navzájom kolmých priemerov kružnice. Združené priemery nemusia byť na seba kolmé, keďže afinita nezachováva kolmosť priamok, (viď na obrázku na seba kolmé priemery PQ a RS a ich obrazy). Zjavne jedinou dvojicou združených priemerov, ktoré sú na seba kolmé, sú hlavná a vedľajšia os.



Avšak keďže rovnobežnosť a deliaci pomer sa afinitou zachovávajú, aj združené priemery elipsy majú niektoré vlastnosti ako dvojica navzájom kolmých priemerov kružnice. Napríklad, ak PQ je priemer elipsy, potom

- dotyčnica elipsy v bode P je rovnobežná s priemerom združeným k PQ,
- PQ rozpoľuje presne tie tetivy elipsy, ktoré sú rovnobežné s priemerom združeným k PQ.

Vidíme, že slovné spojenie „byť kolmý na priemer“ v prípade kružnice sa pre elipsu prekladá ako „byť rovnobežný so združeným priemerom“.

Zadanie 1. Nájdite geometrický lokus stredov tetív elipsy rovnobežných s daným smerom.

1.2. Konštrukcie elipsy.

1.2.1. *Trojuholníková (zástavková) konštrukcia elipsy.* Elipsu nevieme narysovať tak jednoducho ako priamku alebo kružnicu. Elipsu spravidla len čo najpresnejšie črtáme, k čomu nám pomôže, ak s využitím kolmej osovej afinity najprv vykreslíme viacero jej bodov.

Skonštruujeme body elipsy k' so stredom S, ktorej dĺžka hlavnej poloosi je a a dĺžka vedľajšej poloosi je b.

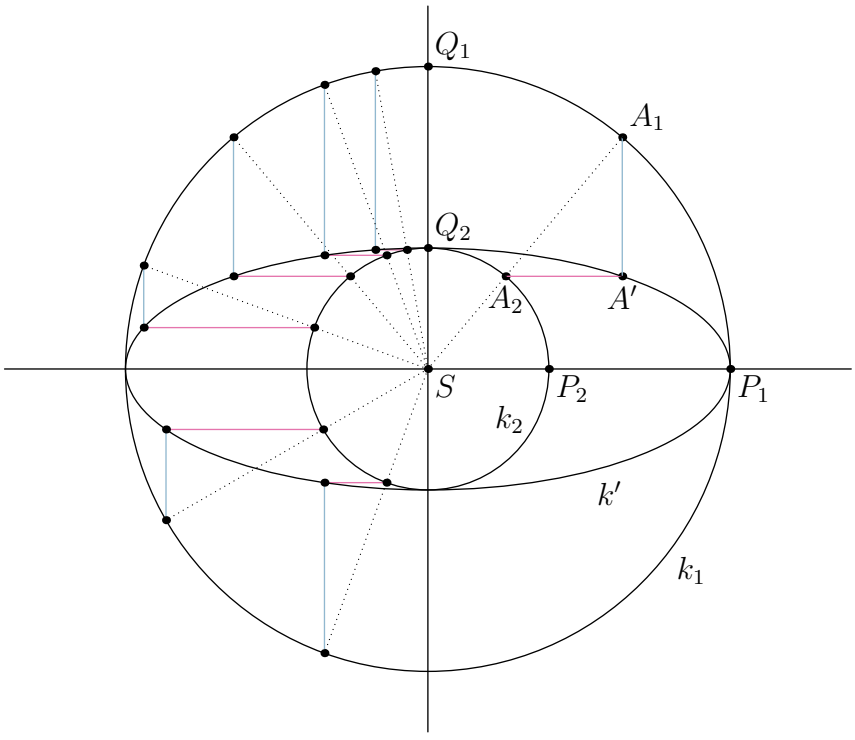
Konštruovanú elipsu skúmame ako obraz dvoch kružníc v dvoch kolmých osových afinitách, ktorých osi sú na seba kolmé:

Tvrdenie 1.2. Nech k_1 a k_2 sú sústredné kružnice a nech f_1, f_2 sú kolmé afinity, ktoré tieto kružnice zobrazia na spoločnú a s kružnicami sústrednú elipsu k':

$$f_1 : k_1(S, a) \mapsto k',$$
$$f_2 : k_2(S, b) \mapsto k'.$$

Nech $A' \in k'$ a nech $A_1 \in k_1$ a $A_2 \in k_2$ sú také body, že $f_1(A_1) = f_2(A_2) = A'$. Potom $A_1.A_2$ ležia na priamke prechádzajúcej bodom S.

Dôkaz.



Keďže pre body A_1, A_2 platí, že $f_1(A_1) = f_2(A_2)$, máme, že $f_1^{-1}(f_2(A_2) = A_1$. Prizrime sa bližšie afinite $f_1^{-1} \circ f_2$: stred S je pevným bodom, bod P_2 zobrazí na P_1 a Q_2 na Q_2 (viď obrázok). Keďže afinita je jednoznačne určená obrazmi troch nekolineárnych bodov, môžme už usúdiť, že $f_1^{-1} \circ f_2$ je rovnoľahlosť so stredom S a s koeficientom a/b. Priamky prechádzajúce stredom rovnoľahlosti sú samodružné, preto sú body S, A_2 a A_1 kolineárne. □

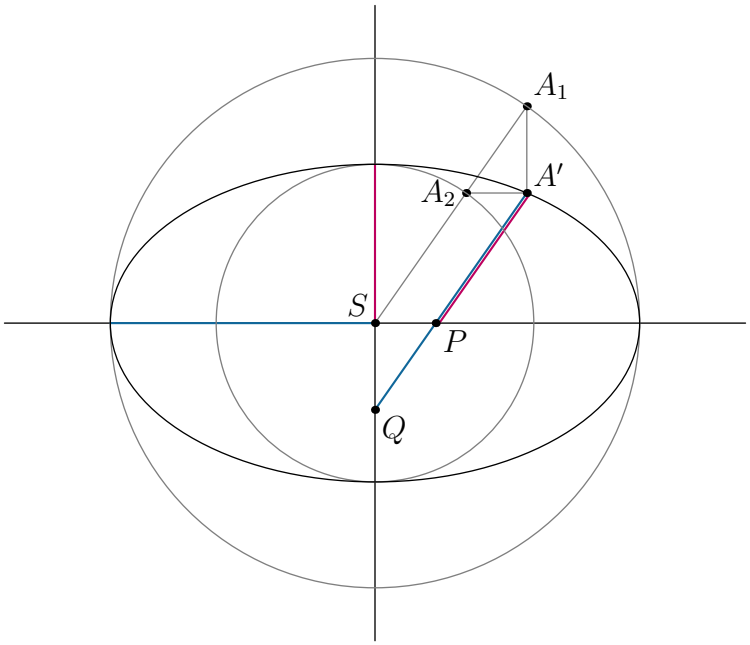
Týmto sme dostali metódu na konštruovanie bodov elipsy k':

(1) nech p je priamka prechádzajúca stredom S,
(2) $A_1 = p \cap k_1$, $A_2 = p \cap k_2$,

(3) A' je taký bod roviny, že $A_1A' \perp P_1S$ a $A_2A' \perp Q_1S$.

1.2.2. *Prúžková konštrukcia elipsy, rozdielová.* Znalosti, z ktorých vychádza trojuholníková konštrukcia elipsy, vieme využiť aj pri dvoch iných konštrukciách: rozdielovej a súčtovej. Pomocou nich vieme skonštruovať elipsu, ak máme dané obidve jej osi, ale dajú sa priamo aplikovať aj v situácii, ak máme danú len jednu os a jeden bod elipsy, ktorý na nej neleží.

Pre pochopenie princípu tejto konštrukcie skúmajme chvíľku nasledovný obrázok.



Štvoruholníky $QA'A_1S$ a $SPA'A_2$ sú rovnobežníky, a preto $|PQ| = |A_1A_2| = a - b$ (a je dĺžka hlavnej a b je dĺžka vedľajšej poloosi). Ak poznáme poloosi elipsy, jej ďalšie body môžme zostrojiť takto:

(1) bodom P sa pohybujeme po hlavnej osi,
(2) na vedľajšej poloosi nájdeme taký bod Q, že $|PQ| = a - b$,
(3) na polpriamke $\overrightarrow{QP}$ zostrojíme bod A' elipsy tak, že $|QA'| = a$.

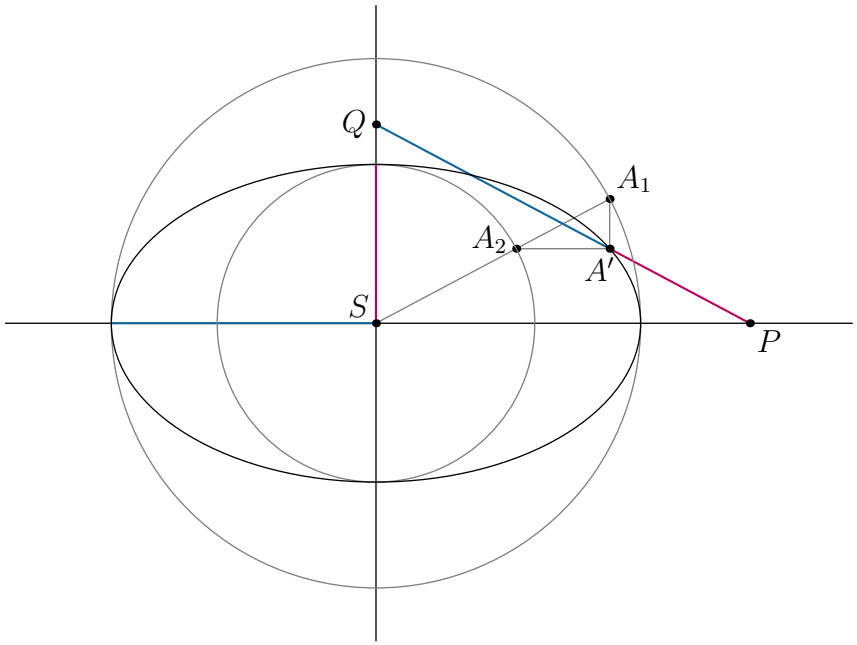
Konštrukcia sa nazýva „prúžková“, lebo ak ju chceme aplikovať, je výhodné použiť prúžok papiera s vyznačenými vzdialenosťami, ako majú medzi sebou body S, A_2 a A_1. Tiež existujú fyzické nástroje, pomocou ktorých je možné elipsu presne narysovať: v ich mechanizme je implementovaná presne táto konštrukcia.

Ak body elipsy zostrojujeme len pomocou kružidla a pravítka, je pohodlnejšou trojuholníková konštrukcia. Znalosť prúžkovej však môžme využiť:

Na zamyslenie. Nech je daná hlavná os a jeden bod elipsy neležiaci na tejto osi.

- Ako skonštruujete ďalšie body elipsy?
- Ako nájdete dĺžku vedľajšej poloosi?

1.2.3. *Prúžková konštrukcia elipsy, súčtová.* Znovu čítame geometrické vzťahy z obrázka:

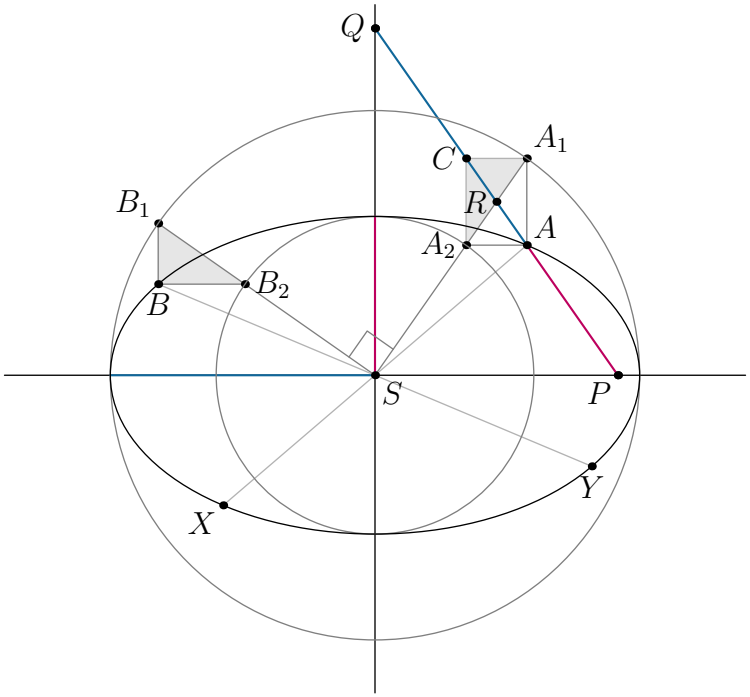


Bod P na priamke hlavnej osi a Q na priamke vedľajšej osi nech tvoria úsečku, ktorá prechádza bodom elipsy A' a zviera s hlavnou osou rovnako veľký uhol ako $\overleftrightarrow{SA_1}$. Preto lichobežník $SPA'A_2$ je rovnoramenný. To isté platí pre „lichobežník so samoprieseko‍m“ QSA_1A'. Preto $|PA'| = b$ a $|QA'| = a$.

Na zamyslenie. Navrhnite postup konštrukcie bodov elipsy pomocou prúžku s dĺžkou $a + b$, na ktorom je vyznačený bod deliaci prúžok v pomere $a : b$.

Na zamyslenie. Nech je daná hlavná alebo vedľajšia os a jeden bod elipsy neležiaci na tejto osi, ako s využitím súčtovej konštrukcie elipsy skonštruujete ďalšie jej body?

1.3. Rytzova konštrukcia osí elipsy. Často sa v geometrii ocitáme v situácii, keď máme zakresliť elipsu, kde nepoznáme žiadnu z osí, poznáme však inú dvojicu združených priemerov. Vtedy môžme siahnuť po tejto konštrukcii, ktorou zo združených priemerov zostrojíme osi elipsy a následne môžme aplikovať trojuholníkovú konštrukciu.



Sledujme situáciu na obrázku. Body A_1 a B_1 sú koncovými bodmi navzájom kolmých priemerov kružnice, ktorej afinným obrazom je skúmaná elipsa, teda A a B sú koncovými bodmi združených priemerov tejto elipsy. Bod C dopĺňa $\triangle A_2AA_1$ na obdĺžnik a je navyše aj obrazom bodu B v otočení o $90°$. Podobne ako pri súčtovej konštrukcii elipsy z rovnoramennosti lichobežníkov usúdime, že

$$|PA| = |SA_2| = |QC| = b \quad \text{(dĺžka vedľajšej poloosi)}$$
$$|PC| = |SA_1| = |QA| = a \quad \text{(dĺžka hlavnej poloosi)}$$

a tak stred R obdĺžnika A_2AA_1C je aj stredom úsečky PQ a navyše $|RS| = |RP|$.

Táto analýza nám už dáva návod na konštrukciu osí elipsy: nech AX a BY sú združené priemery elipsy. Chceme nájsť hlavnú a vedľajšiu os tejto elipsy.

(1) otočíme bod B okolo stredu elipsy o $90°$ do bodu C,
(2) nech R je stred úsečky AC,
(3) zostrojíme kružnicu t: $t(R, |RS|)$,
(4) $\{P, Q\} = t \cap \overleftrightarrow{AC}$
(5) $\overleftrightarrow{SP}, \overleftrightarrow{SQ}$ sú osi elipsy, dĺžky poloosí sú $|AP|$ a $|CP|$.

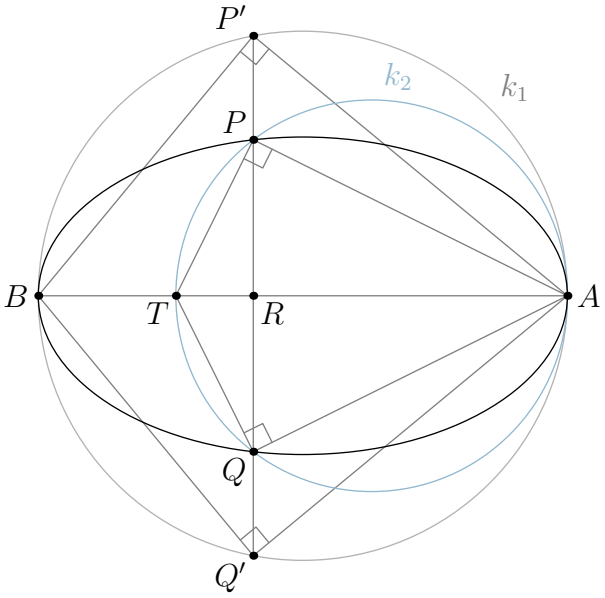
1.4. Oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy. Pre akúkoľvek krivku, (nielen v rovine, ale aj pre priestorovú krivku) jej **oskulačná kružnica** v danom bode je taká kružnica, ktorá krivku v tomto bode najlepšie aproximuje. Formálnejšie: oskulačná kružnica krivky k v bode $P \in k$ je kružnica, ktorá

- prechádza bodom P,
- má v bode P takú istú dotyčnicu ako krivka k,
- má v bode P rovnakú krivosť ako krivka k.

Skúmanie dotyčníc a najmä krivosti kriviek je predmetom štúdia diferenciálnej geometrie. My si tu uvedieme špeciálnu situáciu, ktorá má veľmi veľké využitie pri črtaní elipsy, a síce konštrukciu oskulačných kružníc vo vrcholoch elipsy.

Tvrdenie 1.3. Nech a je dĺžka hlavnej a b je dĺžka vedľajšej poloosi elipsy. Potom oskulačná kružnica v hlavnom vrchole elipsy má polomer b^2/a a oskulačná kružnica vo vedľajšom vrchole elipsy má polomer a^2/b.

Dôkaz. Odvodíme polomer oskulačnej kružnice v hlavnom vrchole, výpočet pre vedľajší vrchol prebieha presne analogicky.



Nech k_1 je kružnica dotýkajúca sa elipsy v jej hlavných vrcholoch A, B. Zmenšujme túto kružnicu tak, aby sa stále dotýkala elipsy vo vrchole A, túto zmenšujúcu sa kružnicu označme k_2. Stred k_2 tiež leží na osi AB. Nech P, Q sú priesečníky k_2 s elipsou a nech P', Q' sú priesečníky $\overleftrightarrow{PQ}$ s kružnicou k_2. Bod T je druhý priesečník k_2 s hlavnou osou elipsy.

Ako sa priesečníky P, Q približujú k vrcholu A, kružnica k_2 stále lepšie aproximuje elipsu v tomto vrchole, v limite tak dostaneme hľadanú oskulačnú kružnicu. Vypočítajme teraz jej polomer.

V pravouhlom $\triangle TAP$ z Euklidovej vety (t.j. z podobnosti $\triangle TRP$ a $\triangle PRA$) dostaneme

$$|PR|^2 = |TR|.|RA|,$$

podobne v pravouhlom $\triangle BAP'$ zas

$$|P'R|^2 = |BR|.|RA|.$$

Pre bod P kdekoľvek na elipse je pomer $|PR|/|P'R|$ vždy rovný b/a. Pre oskulačnú kružnicu bod R splynie s bodom A a tak platí, že $|RB| = 2a$ a $|TR| = 2r$, priemer

oskulačnej kružnice. Z tohto pozorovania a z uvedených rovností tak dostávame

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{|PR|^2}{|P'R|^2} = \frac{|TR|}{|BR|} = \frac{2r}{2a},$$

čiže

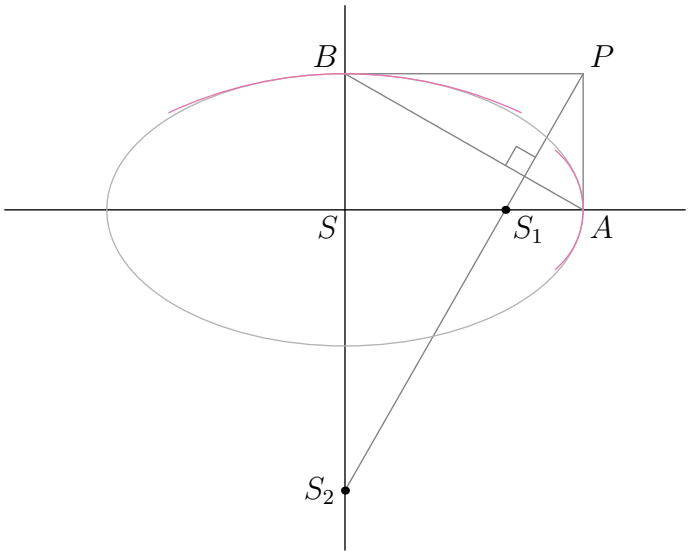
$$r = \frac{b^2}{a}.$$

□

Keďže stred oskulačnej kružnice vo vrchole elipsy sa nachádza na osi elipsy, je pre zostrojenie oskulačnej kružnice potrebné už len skonštruovať na osi bod so vzdialenosťou b^2/a či a^2/b od vrchola. Na tento účel nám poslúži jednoduchá konštrukcia:

Tvrdenie 1.4. Nech S je stred elipsy, A nech je hlavný a B vedľajší vrchol. Nech bod P dopĺňa $\triangle SAB$ na obdĺžnik a nech p je priamka prechádzajúca bodom P a kolmá na $\overleftrightarrow{AB}$. Potom $p \cap \overleftrightarrow{AS}$ je stred oskulačnej kružnice vo vrchole A a $p \cap \overleftrightarrow{BS}$ je stred oskulačnej kružnice vo vrchole B.

Dôkaz. Majme konštrukciu ako v tvrdení vety a stredu oskulačných kružníc označme S_1 a S_2.



Trojuholníky $\triangle SAB$ a $\triangle APS_1$ sú podobné, preto

$$|AS_1| : |SB| = |AP| : |SA|, \quad \text{čiže} \quad |AS_1| = \frac{|SB||AP|}{|SA|} = \frac{b^2}{a}.$$

Tak isto z podobnosti $\triangle SAB$ a $\triangle BS_2P$ dostaneme

$$|BS_2| = \frac{a^2}{b}.$$

□

Ako vidieť z obrázka, oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy sa jednak veľmi jednoducho hľadajú, a tiež túto elipsu lokálne vynikajúco aproximujú. Preto je to často využívaný nástroj pri črtaní elipsy.

2. Kužeľosečky sú rezmi kužeľovej plochy

2.1. Elipsa.

2.1.1. *Kružnica.* Je daná stredom $S \in \mathbb{E}^2$ a polomerom $r \in \mathbb{R}$, $r < 0$ ako množina bodov, ktorých vzdialenosť od stredu S je r:

$$k = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XS| = r\}.$$

Z tejto definície potom už ľahko odvodíme rovnicu kružnice. V špeciálnom prípade, ak $S = (0, 0)$, tak bod $X = (x, y)$ leží na kružnici práve vtedy, keď $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Túto rovnosť štandardne upravujeme tak, aby sme sa vyhli odmocnine. Dostávame tak **implicitnú rovnicu kružnice**, t.j. čosi ako všeobecnú rovnicu:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pri hľadaní rovnice pre kružnicu so stredom v ľubovoľnom bode $S = (m, n)$ môžme uvažovať dvoma spôsobmi:

(a) Priamo z definície kružnice musí pre bod (x, y) kružnice platiť, že

$$\begin{aligned} |(x, y)(m, n)| &= r \\ \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} &= r \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ak to nie je pre nejaké následné výpočty potrebné, rovnicu pre prehľadnosť nechávame v tomto tvare, neroznásobujeme.

(b) Rovnicu kružnice odvodíme úvahami o jej posunutí tak, aby stred kružnice splynul so začiatkom súradnicovej sústavy. Posúvať teda budeme o vektor $(-m, -n)$, čím sa bod so súradnicami (x, y) zobrazí do bodu so súradnicami $(x - m, y - n)$. Uvažujeme napríklad takto: bod (x, y) leží na kružnici so stredom $S = (m, n)$ a polomerom r práve vtedy, keď posunutý bod $(x - m, y - n)$ leží na kružnici s tým istým polomerom a so stredom v začiatku súradníc, t.j. keď

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Príklad 2.1. Akú kružnicu popisuje rovnica

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 4y + 12 = 0?$$

2.1.2. *Kanonická rovnica elipsy.* Elipsu sme si predstavili ako obraz kružnice v kolmej osovej afinite. Analyticky: nech k má stred v začiatku súradníc a polomer a, teda jej rovnica je

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1}$$

Túto rovnicu môžme tiež zapísať

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1, \tag{2}$$

čo sa spolu dá čítať: „to, že bod (x, y) spĺňa našu rovnicu (1), znamená, že bod $(x/a, y/a)$, leží na jednotkovej kružnici, viď (2)“.

Nech osou afinity je x-os a nech táto afinita zobrazuje bod $(0, a)$ do bodu $(0, b)$, $(b > 0)$. Vieme, že obrazom kružnice s polomerom a bude elipsa s poloosami a a b. Navyše z postupu jej zostrojenia rýchlo zistíme, že rovnicou tejto elipsy je

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{3}$$

Z definície elipsy ako obrazu kružnice v kolmej osovej afinite sme odvodili mnohé užitočné vlastnosti elipsy.

Vráťme sa k obrazu kružnice v kolmej afinite. Na takúto afinitu môžme nahliadnuť ako na rovnobežné premietanie medzi rovinami a obraz kružnice môžme vidieť ako rez rotačnej valcovej plochy rovinou.

Otázka 1. Uvažujte rotačnú valcovú plochu. Aké útvary môžu vzniknúť ako rezy tejto plochy rovinou?

Na zamyslenie. Majme rotačnú valcovú plochu $\mathcal{V}$ s polomerom 1, t.j. polomer kružnice k ležiacej v rovine α kolmej na os rotácie valcovej plochy je 1. Nech rovina β zviera s rovinou α uhol φ $(0 < \varphi < \pi/2)$. Aké sú dĺžky poloosí elipsy $\mathcal{V} \cap \beta$?

2.1.3. *QD veta pre valcovú plochu: metrická definícia elipsy.*

Otázka 2. Nech $\mathcal{S}$ je sféra (guľová plocha) a nech B je vonkajší bod sféry. Nech t je priamka prechádzajúca bodom B a dotýkajúca sa sféry $\mathcal{S}$ v bode T. Zdôvodnite, prečo dĺžka $|BT|$ nezávisí od voľby dotyčnice t.

Veta 2.2. [Quetelet-Dandelin, QD] Nech $\mathcal{V}$ je rotačná valcová plocha a nech β je rovina taká, že $\beta \cap \mathcal{V}$ je elipsa, ktorú označíme $\mathcal{E}$.

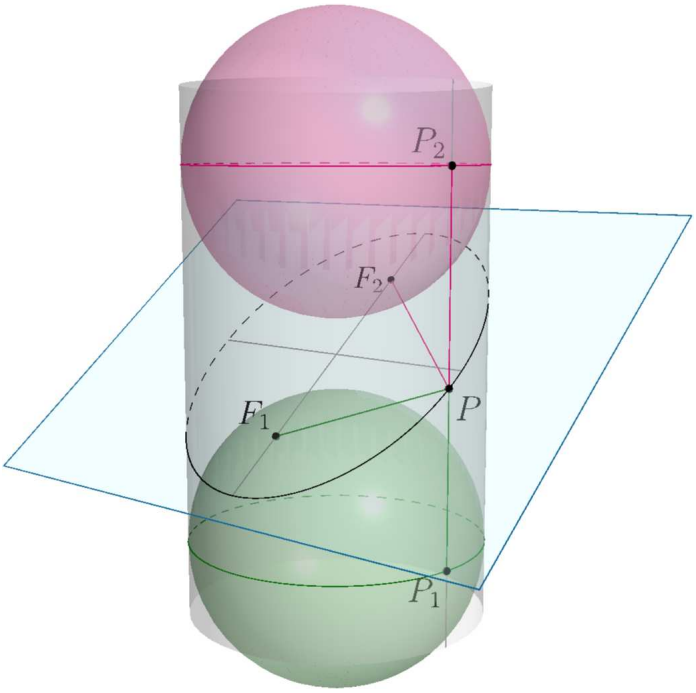
Nech $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sú sféry vpísané do $\mathcal{V}$ a dotýkajúce sa roviny β z navzájom opačných strán od β (tzv. **Dandelinove sféry**), body dotyku nech sú F_1 a F_2.

Potom súčet vzdialeností

$$|PF_1| + |PF_2|$$

je konštantný pre všetky $P \in \mathcal{E}$.

Dôkaz.



Nech P je ľubovoľný bod elipsy $\mathcal{E} = \beta \cap \mathcal{V}$. Keďže rovina β sa dotýka sféry $\mathcal{S}_1$ v bode F_1, je priamka $\overleftrightarrow{F_1P}$ dotyčicou sféry $\mathcal{S}_1$ v F_1.

Uvažujme priamku na valcovej ploche prechádzajúcu bodom P (tzv. **tvoriaca priamka** valcovej plochy). Táto priamka je tiež dotyčnicou sféry $\mathcal{S}_1$, bod dotyku P_1 leží na kružnici, pozdĺž ktorej sa $\mathcal{S}_1$ dotýka valcovej plochy. Preto

$$|PF_1| = |PP_1|$$

(viď Otázka 2).

Analogicky skonštruujeme bod P_2 na dotykovej kružnici sféry $\mathcal{S}_2$ a valcovej plochy tak, že

$$|PF_2| = |PP_2|.$$

Preto

$$|F_1P| + |PF_2| = |P_1P| + |PP_2| = |P_1P_2|,$$

pričom vzdialenosť bodov P_1 a P_2 nezávisí od voľby bodu $P \in \mathcal{E}$. □

Vlastnosť elispy odhalená QD-vetou pre rotačnú valcovú plochu umožňuje alternatívnu definíciu elipsy.

Elipsa je tak daná dvoma rôznymi bodmi F_1, F_2 (**ohniskami**) v rovine a kladným reálnym číslom a, pre ktoré navyše musí platiť $2a > |F_1, F_2|$. Sama elipsa je potom definovaná ako množina takých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od ohnísk je konštantná. Presnejšie:

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}.$$

Pre odvodenie implicitnej rovnice elipsy (t.j. rovnice, ktorú spĺňajú presne body elipsy) vložíme vhodným spôsobom situáciu do súradnicovej sústavy. Označme

$$e = |F_1F_2|/2,$$

číslo e je **(lineárna) excentricita** elipsy. Ľahko nahliadneme, že dané číslo a je dĺžkou hlavnej poloosi a že medzi dĺžkami poloosí a lineárnou excentricitou je vzťah

$$a^2 = b^2 + e^2. \tag{4}$$

Zvolíme teraz súradnice tak, že stred elipsy je v začiatku súradníc a ohniská ležia na x-osi, teda

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$$

a konečne môžme pristúpiť k odvodeniu rovnice elipsy. Bod $X = (x, y)$ leží na elipse práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} |(x,y)(-e,0)| + |(x,y)(e,0)| &= 2a \\ \sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Trpezlivými a pozornými úpravami (dvakrát treba rovnicu umocniť, využiť vzťah (4)) sa nakoniec dopracujeme ku kvadratickej rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ktorú nazývame **kanonická rovnica** elipsy.

Poznámka 2.3. Túto istú rovnicu sme dostali, aj keď sme elipsu analyticky popisovali ako obraz kružnice v kolmej afinite, viď (3). Máme tak popri QD-vete vlastne druhý dôkaz tvrdenia, že elipsa definovaná ako afinný obraz kružnice je taký istý útvar ako množina bodov s konštantným súčtom vzdialeností od daných dvoch ohnísk.

Okrem lineárnej excentricity e priraďujeme elipse aj **numerickú excentricitu** ϵ:

$$\epsilon = \frac{e}{a}.$$

Numerická excentricita popisuje tvar elipsy, presnejšie, ako veľmi sa elipsa líši od kružnice. Na rozdiel od lineárnej sa numerická excentricita zachováva pri škálovaní.

Na zamyslenie. Aké hodnoty môže nadobúdať numerická extentricita elipsy?

Vráťme sa späť k všeobecnej rovnici elipsy. Ak by sme chceli zapísať rovnicu elipsy so stredom v bode $S = (m, n)$, hlavnou osou rovnobežnou s x-osou, na základe úvah vykonaných pri kružnici len urobíme posunutie a dostaneme

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Príklad 2.4. Akú elipsu (kde má stred, vrcholy, akú má excentricitu) popisuje rovnica

- $2x^2 + 5y^2 - 10 = 0$,
- $4x^2 + 4x + y^2 - 6y + 6 = 0$,
- $5x^2 + 6x + 5y^2 - 8y + 10 = 0$?

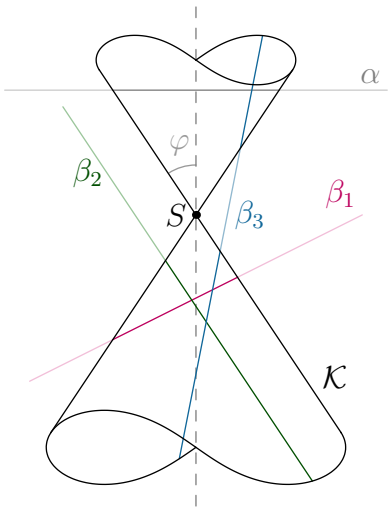
2.2. Rezy kužeľovej plochy. Majte teraz rotačnú kužeľovú plochu $\mathcal{K}$. Rovina α nech je kolmá na os rotácie a neobsahuje vrchol kužeľovej plochy, teda $k = \alpha \cap \mathcal{K}$ je kružnica.

Na zamyslenie. Aký útvar môžme dostať ako prienik roviny a kužeľovej plochy, ak rovina prechádza vrcholom tejto plochy?

Nech β je ľubovoľná rovina neprechádzajúca vrcholom S kužeľovej plochy $\mathcal{K}$.

Topologicky rezom rotačnej kužeľovej plochy rovinou môžme dostať tri rôzne krivky, v závislosti od uhla, ktorý s osou rotácie plochy $\mathcal{K}$ zviera na jednej strane rovina β (označme tento uhol θ) a na druhej strane tvoriace priamky kužeľovej plochy (uhol φ). Môžme dostať

- súvislú ohraničenú krivku, ak $\theta > \varphi$
- súvislú neohraničenú krivku, ak $\theta = \varphi$, alebo
- nesúvislú neohraničenú krivku pozostávajúcu s dvoch komponent, ak $\theta < \varphi$.



Je užitočné mať na pamäti, že hľadať rez plochy $\mathcal{K}$ rovinou β je to isté ako hľadať obraz kružnice k v stredovom premietaní so stredom S a priemetňou β. Krivka $\mathcal{K} \cap \beta$ je tak obrazom kružnice $k = \mathcal{K} \cap \alpha$ v osovej kolineácii medzi rovinami α a β

Otázka 3.

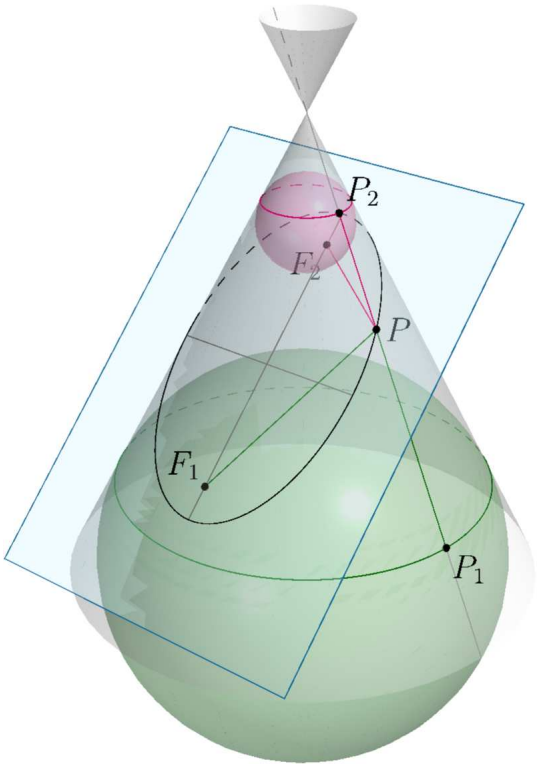
(a) Nech $\theta < \varphi$, teda k sa zobrazí na krivku pozostávajúcu z dvoch komponent. Ktoré body kružnice k sa zobrazia na nevlastné body roviny β?
(b) To isté zadanie ako v časti (a), ale nech $\theta = \varphi$, čiže obrazom kružnice je súvislá neohraničená krivka.

2.2.1. *Elipsa ako rez kužeľovej plochy.* Zamierame sa najprv na prvý prípad, keď prienikom $\mathcal{K} \cap \beta$ je súvislá ohraničená krivka.

Veta 2.5 (Quetelet-Dandelin, QD)**.** Nech $\mathcal{K}$ je rotačná kužeľová plocha. Nech rovina β neprechádza vrcholom tejto kužeľovej plochy a nech zviera s osou rotácie uhol väčší, ako s osou rotácie zvierajú tvoriace priamky $\mathcal{K}$.

Potom $\mathcal{K} \cap \beta$ je elipsa. Navyše, ak $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sú sféry vpísané do $\mathcal{K}$ tak, že sa dotýkajú roviny β z navzájom opačných strán (tzv. **Dandelinove sféry**), body dotyku sfér $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ s rovinou β sú ohniská tejto elipsy.

Dôkaz. Pomocou obrázku si skúste premyslieť detaily dôkazu samostatne. Postupuje sa presne tak isto, ako pri dôkaze Vety 2.2.



□

Dôsledok 2.6. Nech úbežnica u je vzorom nevlastnej priamky v stredovej kolineácii κ. Ak kružnica k nemá s u spoločný žiaden bod, potom $\kappa(k)$ je elipsa.

2.2.2. *Metrická definícia hyperboly.* Nech $F_1, F_2 \in \mathbb{E}^2$ sú rôzne body (tzv. **ohniská**) a nech a je kladné reálne číslo, pre ktoré plati $2a < |F_1, F_2|$. **Hyperbola** je množina takých bodov roviny, ktorých rozdiel vzdialeností od ohnísk je $2a$:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid ||XF_1| - |XF_2|| = 2a\}.$$

Implicitnú rovnicu hyperboly odvodíme presne tak, ako sme to urobili pre elipsu. Nech

$$e = |F_1F_2|/2,$$

číslo e je **(lineárna) excentricita** hyperboly. Označme b kladné reálne číslo, pre ktoré platí

$$e^2 = a^2 + b^2. \tag{5}$$

(Pozor na rozdiel oproti elipse!) Znovu zvolíme súradnice tak, aby ohniská ležali na x-osi súmerne podľa y-osi:

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$$

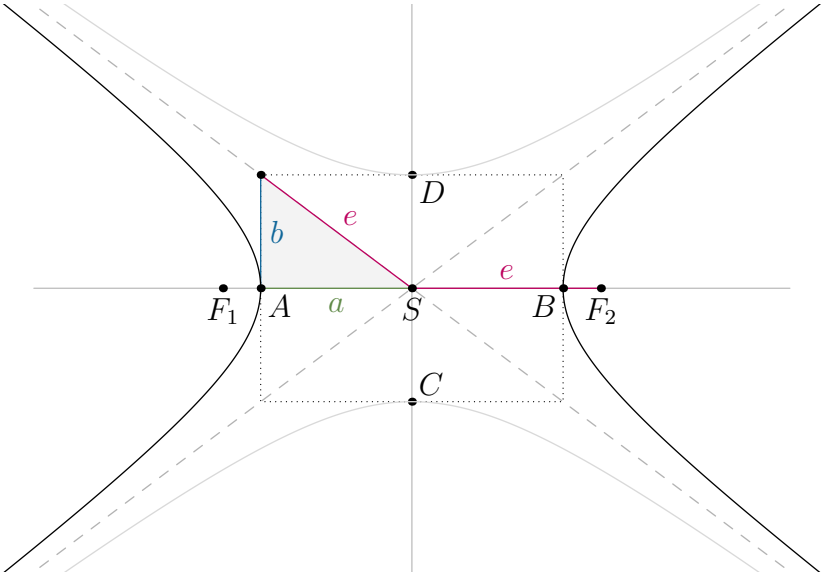
Bod $X = (x, y)$ potom leží na hyperbole práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} ||(x,y)(-e,0)| - |(x,y)(e,0)|| &= 2a \\ \left|\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2}\right| &= 2a. \end{aligned}$$

Algebraickými úpravami nakoniec dostaneme rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

ktorú nazývame **kanonická rovnica** hyperboly.



K ďalšej terminológii:

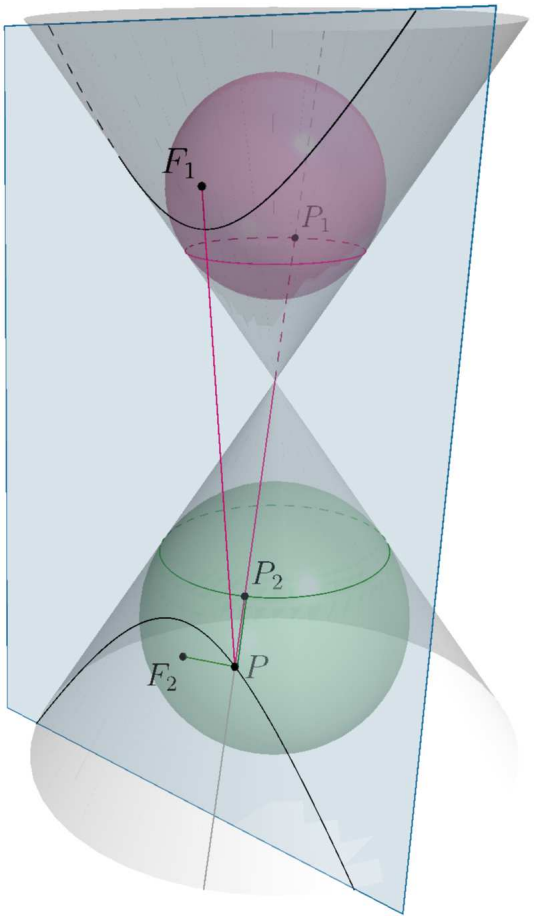
- Pre hyperbolu s rovnicou (6) sa priamky
$$y = \pm\frac{b}{a}x$$
nazývajú **asymptotami** hyperboly. Sú to priamky, ktoré nemajú s hyperbolou žiaden spoločný bod. Všeobecnejšie, priamka tvaru $y = kx$, je sečnicou hyperboly práve vtedy, keď $k \in (-b/a, b/a)$.
- Priesečník asymptôt hyperboly je **stred hyperboly**. Stred hyperboly je tiež jej stredom súmernosti.
- Priamka $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ je **hlavná os** hyperboly. Body hyperboly na hlavnej osi, t.j. body $(-a, 0)$. $(a, 0)$ sú **vrcholy**, alebo tiež **hlavné vrcholy** hyperboly. Dĺžka a, ktorá je tiež vzdialenosťou hlavného vrchola od stredu hyperboly, je **dĺžka hlavnej poloosi**.
- Priamka prechádzajúca stredom hyperboly a kolmá na hlavnú os je **vedľajšia os** hyperboly. Veličina b sa nazýva **dĺžkou vedľajšej poloosi** hyperboly. Body $(0, -b)$ a $(0, b)$ na vedľajšej osi sa nazývajú **vedľajšími vrcholmi hyperboly**. Pozor: vedľajšie vrcholy nie sú bodmi byperboly! Sú ale (hlavnými) vrcholmi tzv. **konjugovanej hyperboly** k hyperbole (6), t.j. hyperboly s rovnicou
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
- **Charakteristický trojuholník hyperboly** je pravouhlý trojuholník s dĺžkami strán a, b, e, ktorého dva z vrcholov sú stred a hlavný vrchol hyperboly a jeho tretí vrchol leží na asymptote hyperboly, viď obrázok.
- Hlavná aj vedľajšia os hyperboly sú aj osami jej súmernosti.
- Ak e je lineárna excentricita hyperboly a a je dĺžka jej hlavnej poloosi, potom
$$\epsilon = \frac{e}{a}$$
je **numerická excentricita** hyperboly. Numerická excentricita hyperboly je vždy väčšia ako 1. Numerická excentricita sa (na rozdiel od lineárnej) podobnosťou zachováva.

2.2.3. *Hyperbola ako rez kužeľovej plochy.*

Veta 2.7 (Quetelet-Dandelin, QD)**.** Nech $\mathcal{K}$ je rotačná kužeľová plocha. Nech rovina β neprechádza vrcholom tejto kužeľovej plochy a nech zviera s osou rotácie uhol menší, ako s osou rotácie zvierajú tvoriace priamky $\mathcal{K}$.

Potom $\mathcal{K} \cap \beta$ je hyperbola. Navyše, ak $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sú sféry vpísané do $\mathcal{K}$ tak, že sa dotýkajú roviny β (**Dandelinove sféry**), body dotyku sfér $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ s rovinou β sú ohniská tejto hyperboly.

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako v prípade elipsy. Tentokrát bod P z rezu $\beta \cap \mathcal{K}$ neleží medzi bodmi P_1 a P_2 na tvoriacej priamke $\mathcal{K}$ ale zvonka úsečky P_1P_2, inak dôkaz postupuje rovnako.



□

Dôsledok 2.8. Nech úbežnica u je vzorom nevlastnej priamky v stredovej kolineácii κ. Ak u je sečnicou kružnice k, potom $\kappa(k)$ je hyperbola.

2.2.4. *Metrická definícia paraboly.* parabola ako limitný prípad elipsy

Nech d je priamka a F bod v rovine $\mathbb{E}^2$, pričom F neleží na d. **Parabola** je množina takých bodov roviny, ktoré majú od F a d rovnakú vzdialenosť:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF| = |Xd|\}.$$

Bod F nazývame **ohniskom** a priamku d **riadiacou priamkou** (**directrix**) paraboly $\mathcal{P}$. Vzdialenosť $p = |Fd|$ sa nazýva **parameter paraboly**.

Pre odvodenie implicitnej rovnice zvolíme súradnicovú sústavu tak, že $F = (p/2, 0)$ a d je rovnobežná s y-osou a x-os pretína v bode $(-p/2, 0)$. Bod $X = (x, y)$ vtedy leží na parabole, keď

$$\begin{aligned} \left|(x,y)\left(\frac{p}{2},0\right)\right| &= |(x,y)d| \\ \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} &= x+\frac{p}{2} \end{aligned}$$

odkiaľ nakoniec dostaneme **kanonickú rovnicu** paraboly:

$$y^2 = 2px.$$

Os súmernosti paraboly, pre parabolu v uvedenom kanonickom tvare ide o x-os, nazývame aj **os paraboly**. Bod paraboly na jej osi je **vrchol** paraboly.

Numerická excentricita paraboly je rovná 1.

Zadanie 2. Pre dané dve disjunktné kružnice nájdite geometrický lokus stredov kružníc, ktoré sa oboch daných kružníc dotýkajú. (Nezabudnite na rôzne prípady: dané kružnice môžu ležať obe vo vonkajšku druhej, alebo môže jedna z nich ležať vo vnútri druhej; dotyk môže byť vonkajší aj vnútorný.)

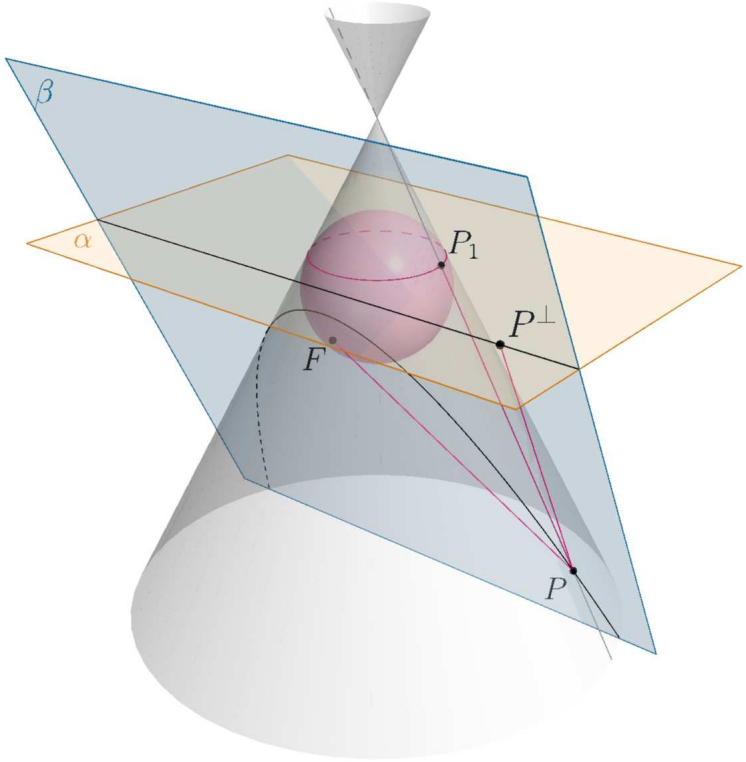
Zadanie 3. Ukážte, že rovnica $y = 1/x$ popisuje hyperbolu a nájdite jej ohniská.

2.2.5. *Parabola ako rez kužeľovej plochy.*

Veta 2.9 (Quetelet-Dandelin, QD)**.** Nech $\mathcal{K}$ je rotačná kužeľová plocha. Nech rovina β neprechádza vrcholom tejto kužeľovej plochy a nech zviera s osou rotácie rovnako veľký uhol ako tvoriace priamky $\mathcal{K}$.

Potom $\mathcal{K} \cap \beta$ je parabola. Navyše, ak $\mathcal{S}$ je sféra vpísaná do $\mathcal{K}$ tak, že sa dotýka roviny β (**Dandelinove sféra**), bod dotyku sféry $\mathcal{S}$ s rovinou β je ohnisko tejto paraboly.

Dôkaz.



Bod dotyku sféry $\mathcal{S}$ s rovinou β označme F. Ďalej označme ako α rovinu, v ktorej leží dotyková kružnica sféry $\mathcal{S}$ a kužeľovej plochy $\mathcal{K}$. Nech d je priesečnica rovín α a β.

Pre ľubovoľný bod P krivky $\mathcal{K} \cap \beta$ nech P_1 je bod sféry $\mathcal{S}$ ležiaci na tvoriacej priamke prechádzajúcej bodom P a nech $P^\perp$ je kolmý priemer P na priamku d v rovine β. Ako pri predchádzajúcich dôkazoch, aj tu platí, že

$$|PP_1| = |PF|. \tag{7}$$

Navyše podľa predpokladu o rovine β vieme, že priamky $\overleftrightarrow{PP_1}$ a $\overleftrightarrow{PP^\perp}$ zvierajú s rovinou α zhodné uhly. Odtiaľ už môžme usúdiť, že

$$|PP_1| = |PP^\perp|,$$

čo spolu s (7) dokazuje tvrdenie vety. □

Na zamyslenie. Vyargumentuje detailnejšie, prečo z faktu, že priamky $\overleftrightarrow{PP_1}$ a $\overleftrightarrow{PP^\perp}$ zvierajú s rovinou α zhodné uhly, vyplýva, že $|PP_1| = |PP^\perp|$. (Premietnite si bod P kolmo do roviny α a overte, že ste tak získali dva zhodné trojuholníky.)

Dôsledok 2.10. Nech úbežnica u je vzorom nevlastnej priamky v stredovej kolineácii κ. Ak u je dotyčnicou kružnice k, potom $\kappa(k)$ je parabola.

directrix kužosečky (Apollóniova definícia)?

3. Dotyčnice kužeľosečiek a iné konštrukcie

3.1. Najprv ešte niečo málo k terminológii kužeľosečiek. Elipsa a parabola rozdeľujú rovinu na dve súvislé oblasti. Hyperbola sa javí rozdeľovať rovinu na oblasti tri. No keďže vieme, že ide o obraz kružnice v kolineácii, dve z týchto oblastí sú obrazom jednej oblasti určenej kružnicou, a preto na ne aj v prípade hyperboly budeme nahliadať ako na jednu oblasť.

Mnohé pojmy spojené s kužeľosečkami a tiež ich vlastnosti môžme veľmi jednoducho a pohodlne odvodiť z faktu, že každá kužeľosečka je obrazom kružnice v nejakej kolineácii. Tak **vnútrom** kužeľosečky nazývame tú oblasť roviny, ktorá je obrazom vnútra kružnice, druhá oblasť určená kužeľosečkou je jej **vonkajškom**.

Všimnite si, že vnútorná oblasť kužeľosečky je v každom prípade tá oblasť, ktorá obsahuje aj jej ohniská v prípade elipsy a hyperboly (stred kružnice tu považujeme za dvojicu splývajúcich ohnísk elipsy), či ohnisko v prípade paraboly.

Kolineácia zachováva incidenciu útvarov a tiež bijektívne zobrazuje priamky na priamky. Tento fakt môžme využiť pri skúmaní vzájomnej polohy priamky a kužeľosečky. Veľmi rýchlo tak získame ďalšie vlastnosti a pojmy a to vďaka tomu, že sú nám dôverne známe v prípade kružnice a kolineácia ich zachováva:

- Ľubovoľná priamka má s kužeľosečkou spoločné najviac dva body.
- **Nesečnica** nemá s kužeľosečkou spoločný žiaden bod a celá sa nachádza vo vonkajšej oblasti kužeľosečky.
- **Dotyčnica** má s kužeľosečkou spoločný jediný bod, všetky ostatné body dotyčnice sú vonkajšími bodmi kužeľosečky.
- Každým bodom kužeľosečky prechádza práve jedna dotyčnica.
- **Sečnica** má s kužeľosečkou spoločný jeden alebo dva body a okrem nich obsahuje vnútorné aj vonkajšie body kužeľosečky.

Ak by sme brali do úvahy aj nevlastné body roviny, sečnica by vždy pretínala kužeľosečku v dvoch bodoch. Pokiaľ uvažujeme len vlastné body, v prípade paraboly aj hyperboly existujú sečnice, ktoré ju pretínajú len v jednom bode. Smery (t.j. nevlastné body) takýchto sečníc nazývame **asymptotické smery** kužeľosečky. Inak povedané: asymptotickými smermi kužeľosečky sú jej nevlastné body. Hyperbola má tak dva asymptotické smery, parabola jeden a elipsa nemá žiaden (reálny) asymptotický smer.

Sprievodič bodu kužeľosečky je priamka spájajúca tento bod s ohniskom kužeľosečky. Elipsa a hyperbola tak prirodzene majú dva sprievodiče. Pre parabolu dodefinujeme druhý sprievodič ako priamku s asymptotickým smerom prechádzajúcu daným bodom. Pod **dĺžkou sprievodiča** rozumieme

(a) vzdialenosť príslušného bodu a ohniska;
(b) v prípade paraboly a jej sprievodiča s asymptotickým smerom ide o vzdialenosť príslušného bodu od riadiacej priamky.

Vonkajší uhol sprievodičov je uhol určený sprievodičmi bodu kužeľosečky, ktorého jedno rameno smeruje dovnútra kužeľosečky a druhé von.

3.2. Elipsa.

3.2.1. *Dotyčnice elipsy.*

Otázka 4. Prečo je dotyčnica ku kružnici kolmá na polomer prechádzajuci bodom dotyku?

Zadanie 4. Nech body A, B ležia na jednej strane od priamky p. Nájdite na priamke p taký bod X, aby

- súčet vzdialeností $|AX| + |BX|$ bol minimálny,
- rozdiel vzdialeností $||AX| - |BX||$ bol maximálny.

Otázka 5. Nech body A, B ležia na jednej strane od priamky p. Nech X je taký bod na p, že vzdialenosť $|AX| + |BX|$ je minimálna. Prečo priamky $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{BX}$ zvierajú s p zhodné uhly?

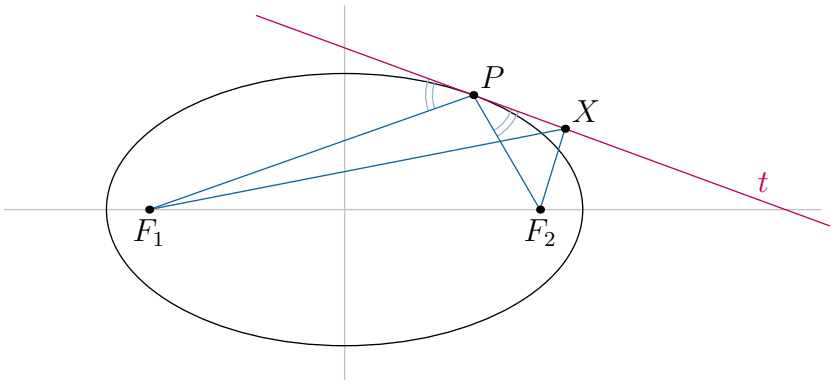
Zadanie 5. Nech p, q sú rovnobežné navzájom rôzne priamky a nech body A, B ležia v páse medzi týmito priamkami. Nájdite najkratšiu cestu z A do B takú, aby obsahovala bod z p aj z q.

Veta 3.1. Nech P je bod elipsy a t nech je dotyčnica tejto elipsy v bode P. Potom sprievodiče bodu P zvierajú s dotyčnicou t zhodné uhly. Ekvivalentne: dotyčnica elipsy rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov.

Dôkaz. Nech $X \in t$ je ľubovoľný bod rôzny od P. Bod X je vonkajším bodom elipsy, preto

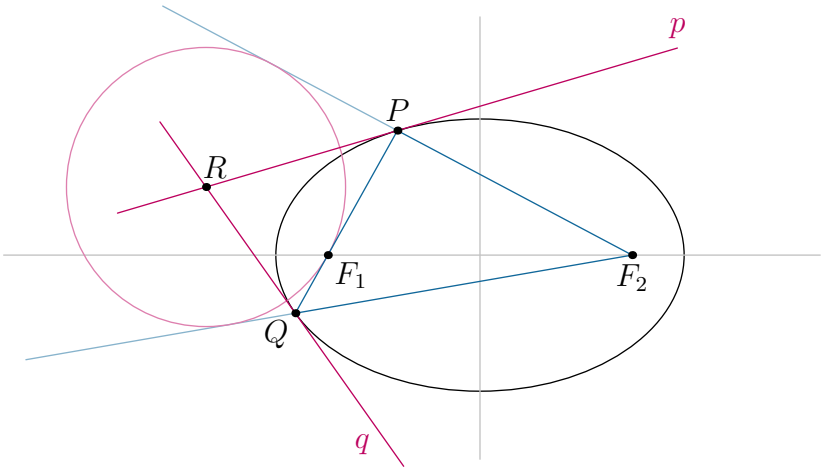
$$|F_1X| + |XF_2| > |F_1P| + |PF_2|,$$

kde F_1 a F_2 sú ohniská elipsy.



Vidíme, že bod P je presne tým bodom priamky t, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od ohnísk minimálny. Odtiaľ dostávame tvrdenie vety (viď Otázka 5). □

Zadanie 6. Nech tetiva PQ elipsy prechádza jej ohniskom F_1. Nech p, q sú dotyčice elipsy v bodoch P, Q a nech R je priesečník dotyčníc p, q. Ukážte, že R je stredom kružnice pripísanej trojuholníku PQF_2, pričom F_1 je jedným z bodov dotyku.



Zadanie 7. Nech A je bod zvonka elipsy a nech P, Q sú body dotyku dotyčníc prechádzajúcich cez bod A. Potom

- sú uhly $\angle PAF_1$ a $\angle QAF_2$ zhodné,
- je F_1A osou $\angle PF_1Q$.

(F_1 a F_2 sú ohniská elipsy.)

Tvrdenie 3.2. Geometrický lokus bodov, z ktrých elipsu vidieť pod pravým uhlom, je kružnica.

Dôkaz. doplniť □

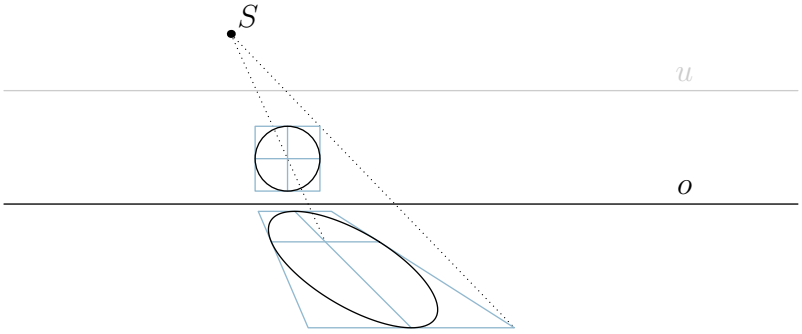
riadaica kružnica elipsy?

3.2.2. *Elipsa ako obraz kružnice v kolineácii.*

Zadanie 8. Nech κ je stredová kolineácia (stred kolineácie je vlastný bod euklidovskej roviny) s osou o. Majme danú kružnicu k. Nech úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) nepretína kružnicu k a ani sa jej nedotýka. Zostrojte obraz kružnice k v kolineácii κ.

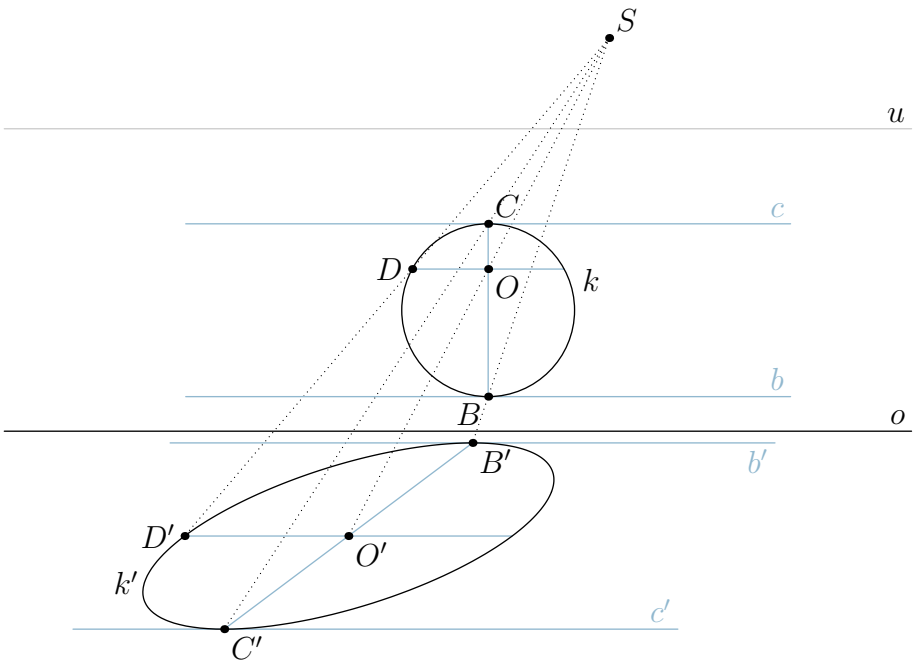
Rozbor. Obrazom kružnice k v kolineácii κ je elipsa, nájdeme jej osi.

V kolineácii κ obrazom dvojice navzájom kolmých priemerov určite nebude dvojica združených priemerov, ako tomu bolo v prípade afinity. Dokonca ani stred kružnice sa určite nezobrazí na stred elipsy, viď obrázok.



Teda v kolineácii nemáme zaručené ani to, že priemer kružnice sa zobrazí na priemer elipsy. Vieme len, že obrazom priemeru kružnice je tetiva elipsy.

Pozrime sa ale bližšie na priemer BC kružnice k, ktorý je kolmý na os o:



- Dotyčnica b ku kružnici k v bode B je rovnobežná s osou o, preto aj jej obraz b' je rovnobežný s osou o a tiež je b' dotyčnicou elipsy k' v bode B'; to isté platí pre bod C.
- Keďže dotyčnice elipsy k' v koncových bodoch tetivy $B'C'$ sú navzájom rovnobežné, je tetiva $B'C'$ určite priemerom elipsy k'; ide o jediný priemer kružnice, ktorý sa zobrazí na priemer elipsy.
- Smer priemeru združeného s priemerom $B'C'$ je ten istý, ako smer dotyčníc b' a c'
- a keďže ide aj o smer osi o, ktorý sa v kolineácii zachováva, bude mať ten istý smer aj tetiva kružnice k, ktorá sa zobrazuje na priemer združený s $B'C'$.

Postup konštrukcie.

(1) B, C; BC je priemerom kružnice k kolmý na os o,
(2) B', C'; $B' = \kappa(B)$, $C' = \kappa(C)$,
(3) O'; O' je stred úsečky $B'C'$,
(4) O; $O' = \kappa(O)$ (O je vzor O'),
(5) D; $D \in k$, $OD \perp BC$,
(6) D'; $D' = \kappa(D)$,
(7) zo združených polomerov $O'B'$, $O'D'$ pomocou Rytzovej konštrukcie (viď odsek 1.3: Rytzova konštrukcia osí elipsy) nájdeme osi elipsy a zostrojíme elipsu.

3.3. Parabola.

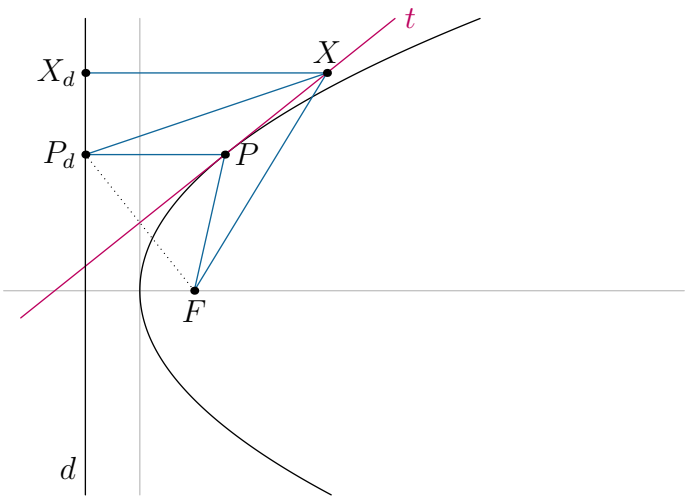
3.3.1. *Dotyčnice paraboly.*

Tvrdenie 3.3. Dotyčnica paraboly v ľubovoľnom jej bode rozpoľuje vonkajší uhol jeho sprievodičov.

Dôkaz. Vonkajšie body paraboly sú presne tie body X, pre ktoré platí, že

$$|Xd| < |XF|,$$

kde d je riadiaca priamka a F ohnisko paraboly.



Nech t je os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu P danej paraboly. Nech P_d je kolmý priemet bodu P na riadiacu priamku (t.j. $\overleftrightarrow{PP_d}$ je sprievodič bodu P). Potom z definície paraboly je t aj osou úsečky FP_d.

Pre bod X priamky t rôzny od P potom platí

$$|XF| = |XP_d| > |Xd|,$$

ide teda o vonkajší bod paraboly. Odtiaľ vidíme, že t je jej dotyčnicou v bode X.

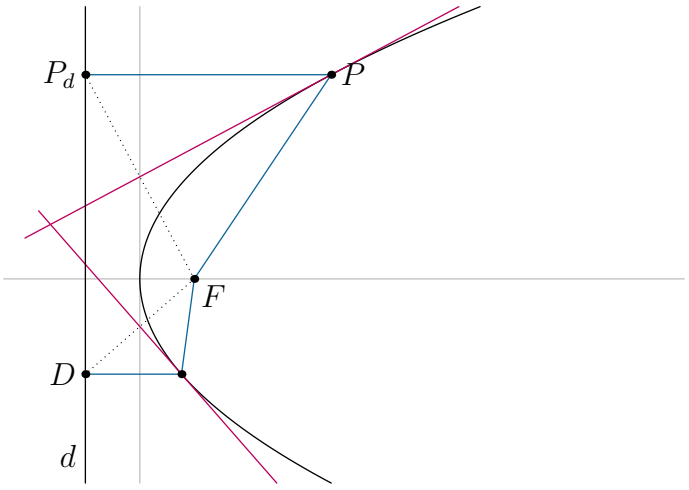
Keďže kužeľosečka má v každom svojom bode presne jednu dotyčnicu (odsek 3.1), platí aj opačná implikácia: ak t je jej dotyčnicou v bode P, potom t rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov bodu P. □

Veta 3.4.

(i) Body súmerne združené s ohniskom paraboly podľa všetkých jej dotyčníc tvoria riadiacu priamku paraboly.

(ii) Kolmé priemety ohniska paraboly na všetky jej dotyčnice tvoria dotyčnicu vo vrchole paraboly.

Dôkaz. Ide o dôsledok Tvrdenia 3.3.



(i) Dotyčnica v bode P je osou úsečky P_dF. Bod P_d je teda obrazom ohniska v súmernosti podľa dotyčnice a leží na riadiacej priamke.

Naopak nech D je ľubovoľný bod na riadiacej priamke. Potom bod na osi úsečky DF ležiaci zároveň na priamke prechádzajúcej bodo bodom D a rovnobežnej s osou paraboly, je bodom paraboly, a body D a F sú osovo združené podľa dotyčnice v tomto bode.

(ii) Päta kolmice z ohniska na dotyčnicu v bode P je stredom úsečky FP_d. Tvrdenie je tak priamočiarym dôsledkom časti (i). □

Veta 3.5.

(i) Pre ľubovoľný smer rôzny od asymptotického smeru paraboly existuje dotyčnica k tejto parabole rovnobežná s daným smerom.
(ii) Ľubovoľným vonkajším bodom paraboly možno viesť k tejto parabole dve dotyčnice.

Dôkaz. Vyjdeme z toho, že ľubovoľným vlastným aj nevlastným vonkajším bodom kružnice prechádzajú dve jej dotyčnice. Kolineácia tieto vlastnosti zachováva, preto tvrdenie platí aj pre parabolu. Dostávame tak tvrdenie (ii) vety.

Ľubovoľný smer, ktorý nie je asymptotickým smerom paraboly, je nevlastným bodom, ktorý je vonkajší vzhľadom na parabolu. Existujú preto dve dotyčnice obsahujúce tento nevlastný bod: nevlastná priamka a dotyčnica, ktorá je predmetom tvrdenia (i). □

Zadanie 9. Parabola nech je určená ohniskom a riadiacou priamkou. Pre daný smer rôzny od asymptotického smeru paraboly zostrojte k parabole dotyčnicu majúcu daný smer.

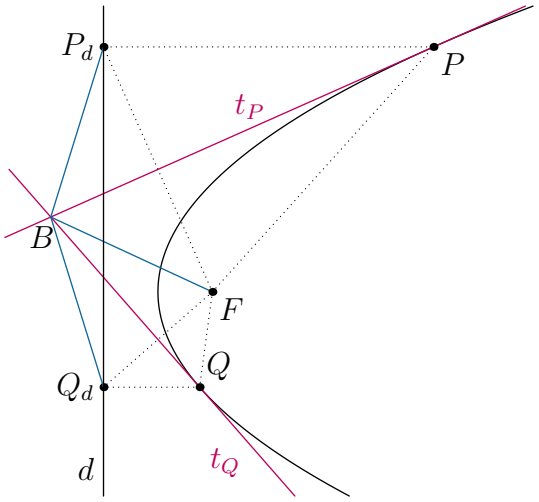
Rozbor. Využijeme znalosť, že dotyčnica v bode P paraboly je osou úsečky určenej ohniskom F a pätou kolmice P_d z P na riadiacu priamku.

Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko, d riadiaca priamka paraboly a s nech je daný smer dotyčnice.

(1) l; $l \ni F$, $l \perp s$,
(2) P_d; $P_d \in d \cap l$,
(3) t; t je os FP_d – t je hľadaná dotyčnica.

Zadanie 10. Parabola nech je určená ohniskom a riadiacou priamkou. Zostrojte jej dotyčnice prechádzajúce daným vonkajším bodom.

Rozbor. Znovu využijeme vlastnosť dotyčnice, že je osou úsečky určenej ohniskom F a pätou kolmice z bodu paraboly na riadiacu priamku.



Nech B je priesečník dotyčníc t_P a t_Q paraboly v bodoch P a Q. Potom $|BP_d| = |BF|$, lebo t_P je osou P_dF; analogicky $|BQ_d| = |BF|$. Body P_d, F a Q_d tak ležia na spoločnej kružnici so stredom B.

Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko, d riadiaca priamka paraboly a B vonkajší bod paraboly.

(1) k; $k(B, |BF|)$,
(2) P_d, Q_d; $\{P_d, Q_d\} = k \cap d$,
(3) t_P, t_Q; t_P je os FP_d, t_Q je os FQ_d – t_P, t_Q sú hľadané dotyčnice.

Tvrdenie 3.6. Nech p je dotyčnica paraboly v bode P. Nech R je priesečník dotyčnice p s osou paraboly a nech P' je kolmý priemet bodu P na os paraboly. Potom vrchol paraboly je stredom úsečky RP' (tzv. **vlastnosť subtangenty paraboly**.

Dôkaz. doplniť □

Zadanie 11. Nech p, q sú dotyčnice paraboly v bodoch P, Q a nech R je priesečník dotyčníc p, q. Ak P_p, Q_d, R_d sú kolmé priemety bodov P, Q, R na riadiacu priamku, potom R_d je stredom úsečky P_dQ_d

Tvrdenie 3.7. Geometrický lokus bodov, z ktrých parabolu vidieť pod pravým uhlom, je jej riadiaca priamka.

Dôkaz. doplniť □

3.3.2. *Parabola ako obraz kružnice v kolineácii.*

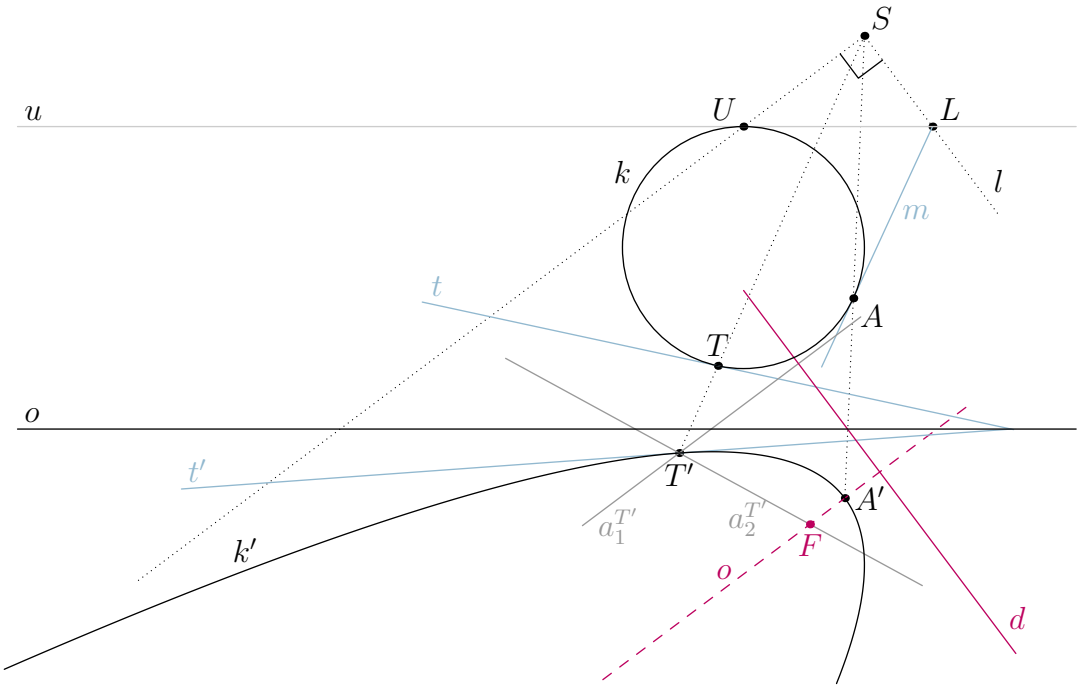
Zadanie 12. Nech κ je stredová kolineácia Nech sa úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) dotýka kružnice k. Zostrojte obraz k v kolineácii κ.

Rozbor. Obrazom kružnice k v kolineácii κ je parabola, nájdeme jej ohnisko a riadiacu priamku.

Akýkoľvek zväzok priamok so stredom na úbežnici sa v kolineácii κ zobrazí na osnovu. Spomedzi týchto zväzkov sú pre konštrukciu dôležité dva. Prvý má stred v bode dotyku U kružnice k s úbežnicou u. Samodružnou priamkou tohto zväzku je $\overleftrightarrow{SU}$ a tak sa v kolineácii zobrazí na osnovu, do ktorej patrí aj os paraboly k'. Druhým dôležitým zväzkom je zväzok obsahujúci samodružnú priamku prechádzajúcu S a

kolmú na $\overleftrightarrow{SU}$. Tento zväzok sa zobrazí na osnovu kolmú na os paraboly k', teda bude obsahovať riadiacu priamku paraboly aj dotyčnicu v jej vrchole.

Postup konštrukcie.



Nech S je stred, o os a u úbežnica kolineácie κ.

(1) U; $U \in k \cap u$,
(2) l; $l \ni S$, $l \perp \overleftrightarrow{SU}$,
(3) L; $L \in l \cap u$,
(4) m, A; $m \ni L$, m sa dotýka kružnice k v bode A rôznom od U,
(5) A'; $A' = \kappa(A)$ – A' je vrchol paraboly k',
(6) o; $o \ni A'$, $o \parallel \overleftrightarrow{SU}$ – o je osou paraboly k',
(7) T, t; $T \in k$, $T \neq U$, $T \neq A$, t je dotyčnica kružnice k v bode T,
(8) T', t'; $T' = \kappa(T)$, $t' = \kappa(t)$,
(9) $a_1^{T'}$; $a_1^{T'} \ni T'$, $a_1^{T'} \parallel o$ – $a_1^{T'}$ je sprievodič bodu T' paraboly k',
(10) $a_2^{T'}$; $a_2^{T'}$ je obraz $a_1^{T'}$ v súmernosti podľa dotyčnice t' – $a_2^{T'}$ je druhý sprievodič bodu T',
(11) F; $F \in o \cap a_2^{T'}$ – F je ohnisko paraboly k',
(12) d; $d \perp o$, $|DA'| = |FA'|$ – d je riadiaca priamka paraboly k'.

Na zamyslenie. Vedeli by ste pre parabolu nájsť kolineáciu, ktorá túto parabolu zobrazí na kružnicu?

3.3.3. *Vizualizácia paraboly.*

Zadanie 13. (**Bodová konštrukcia paraboly.**) Parabolu danú riadiacou priamkou a ohniskom vizualizujeme tak, že nájdeme niekoľko jej bodov a následne načrtneme krivku, ktorá tieto body interpoluje.

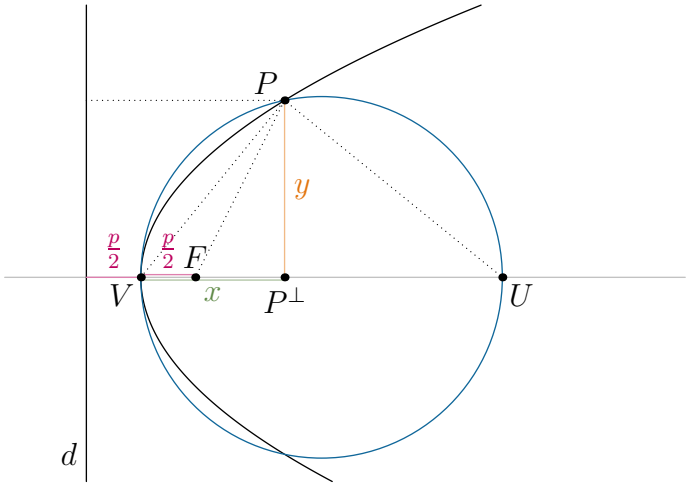
Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko a d riadiaca priamka paraboly. Jednotlivé body konštruujeme z metrickej definície paraboly:

(1) nech c je ľubovoľné číslo nie menšie ako $|dF|/2$,
(2) l; $l \parallel d$, $|ld| = c$,
(3) k; $k(F, c)$,
(4) P; $P \in l \cap k$ – P je bod paraboly.

Ak parabolu len črtáme, je užitočné poznať polomer oskulačnej kružnice v jej vrchole.

Veta 3.8. Polomer oskulačnej kružnice vo vrchole paraboly je rovný parametru paraboly.

Dôkaz. Nech sa kružnica so stredom na osi paraboly a polomerom r dotýka tejto paraboly vo vrchole a pretína ju v dvoch ďalších bodoch, navzájom súmerných podľa osi paraboly.



Bod P leží na parabole, preto $|PF| = |Pd|$, teda

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Z podobnosti trojuholníkov $\triangle VP^\perp P$ a $\triangle PP^\perp U$ (oba sú podobné s $\triangle VPU$) zas máme

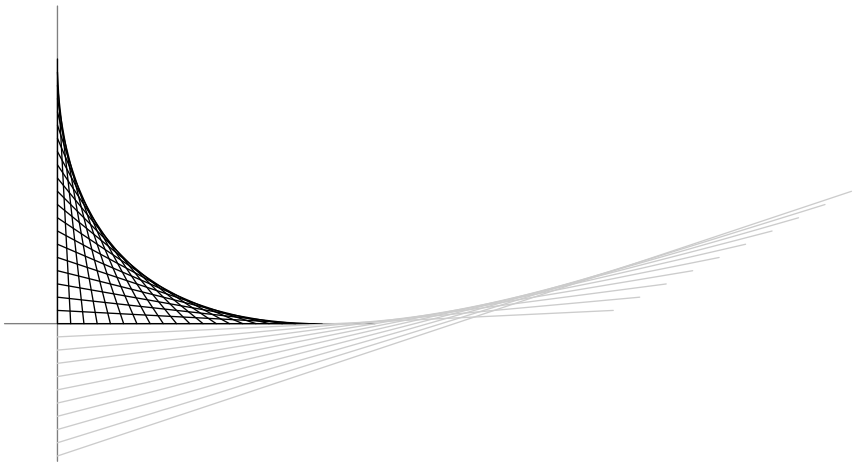
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2r - x}.$$

Z týchto dvoch rovností po úpravách dostaneme

$$2r = x + 2p.$$

Oskulačnú kružnicu získame ako limitu, keď sa bodom P pohybujeme po parabole smerom k vrcholu, teda keď $x = 0$. Odtiaľ vidíme, že polomer oskulačnej kružnice je rovný p, parametru paraboly. □

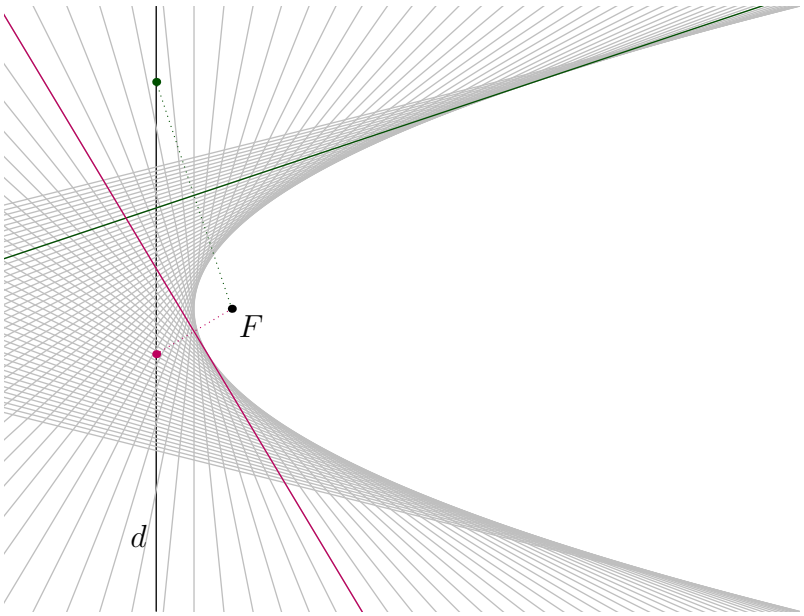
Na zamyslenie. Ak na dvoch navzájom kolmých priamkach pospájate body s rovnakými rozostupmi (viď obrázok), objaví sa parabola. Prečo?



Muslia byť dané priamky na seba kolmé, aby obálkou bola časť paraboly?

Zadanie 14. (**Parabola ako obálka svojich dotyčníc.**) Parabolu danú riadiacou priamkou a ohniskom vizualizujeme tak, že vykreslíme jej dotyčnice.

Postup konštrukcie. Nech F je ohnisko a d riadiaca priamka paraboly. Dotyčnice paraboly konštruujeme podľa Vety 3.4.



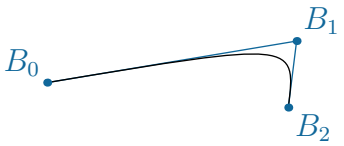
(1) nech D je ľubovoľný bod na riadiacej priamke d,
(2) t; t je os FD – t je dotyčnica paraboly.

Poznámka 3.9. Z projektívnej geometrie možno už poznáte pojem duálna krivka: pre danú krivku v projektívnej rovine ide o množinu jej dotyčníc chápanú ako krivku v duálnej projektívnej rovine. Keď vizualizujete parabolu ako obálku dotyčníc, robíte vlastne bodovú konštrukciu duálnej krivky k tejto parabole.

Zadanie 15. (**Parabola ako kvadratická Bézierova krivka.**) Nech κ je stredová kolineácia a nech sa úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) dotýka kružnice k.

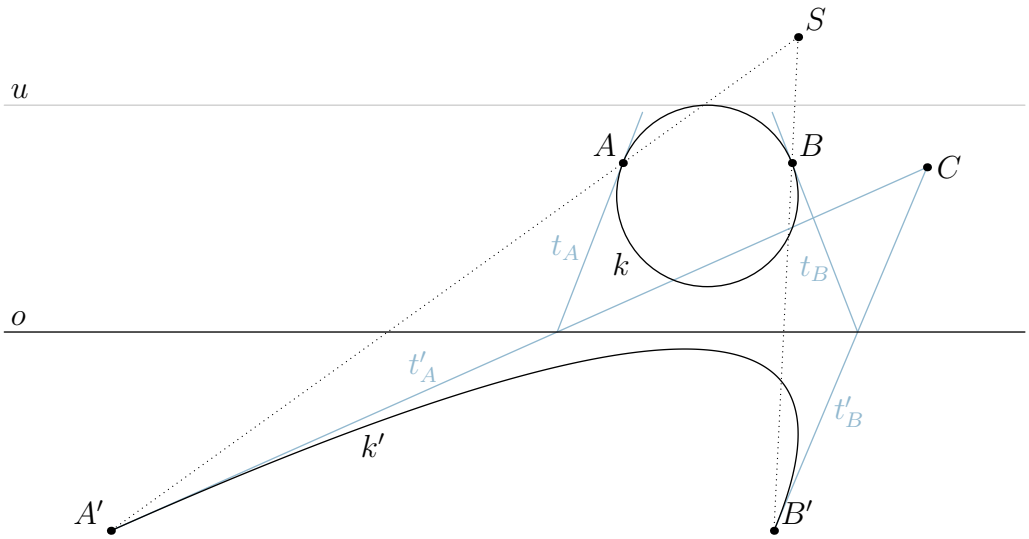
Nech A, B sú body na kružnici neležiace na u. Nájdeme obraz oblúka AB kružnice disjunktného s u.

Rozbor. Kvadratická Bézierova krivka je vždy časťou paraboly a naopak ktorýkoľvek oblúk ľubovoľnej paraboly môžme interpretovať ako Bézierovu krivku.



Kvadratická Bézierova krivka je určená troma riadiacimi vrcholmi. Prvý a posledný vrchol interpoluje ako začiatočný a koncový bod krivky. Prostredný riadiaci vrchol zas určuje smery dotyčníc v začiatočnom aj koncovom bode krivky.

Postup konštrukcie.



(1) A, B; $A, B \in k$, $A, B \notin u$,
(2) A'; $A' = \kappa(A)$,
(3) t_A; t_A je dotyčnica kružnice v bode A,
(4) t'_A; $t'_A = \kappa(t_A)$,
(5) B', t_B, t'_B – analogicky,
(6) C; $C \in t'_A \cap t'_B$,
(7) Bézierova krivka s riadiacimi vrcholmi A', C, B' je obraz oblúka AB v kolineácii κ.

3.4. Hyperbola.

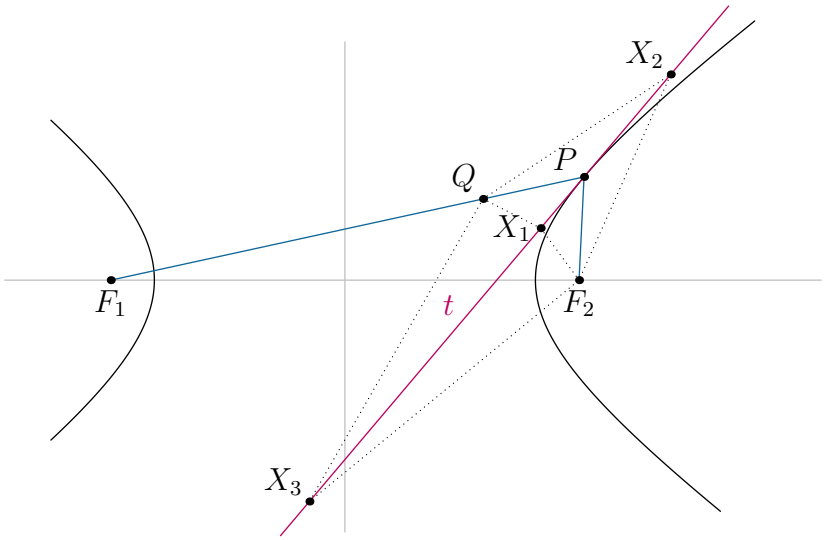
3.4.1. *Dotyčnice hyperboly.*

Tvrdenie 3.10. Dotyčnica hyperboly v ľubovoľnom jej bode rozpoľuje vonkajší uhol jeho sprievodičov.

Dôkaz. S označením podľa metrickej definície hyperboly pre jej vonkajšie body platí, že

$$||XF_1| - |XF_2|| < 2a,$$

pre vnútorné platí opačná nerovnosť.



Bez ujmy na všeobecnosti nech bod P leží na vetve paraboly bližšie k ohnisku F_2 a nech t je os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu P danej hyperboly. Nech Q je bod súmerný s bodom P podľa priamky t. Z konštrukcie priamky t potom Q leží na F_1P a z definície hyperboly $|F_1Q| = 2a$. Potom pre ľubovoľný bod $X \in t$ rôzny od P platí

$$|XQ| = |XF_2|$$

a preto ak X je bližšie k ohnisku F_2 než F_1 (prípad X_1 a X_2 na obrázku), tak s využitím trojuholníkovej nerovnosti

$$0 < |XF_1| - |XF_2| < (|XQ| + |QF_1|) - |XF_2| = (|XF_2| + 2a) - |XF_2| = 2a$$

prípade, ak X je bližšie k ohnisku F_1 (X_3 na obrázku), potom

$$0 < |XF_2| - |XF_1| = |XQ| - |XF_1| < |F_1Q| = 2a.$$

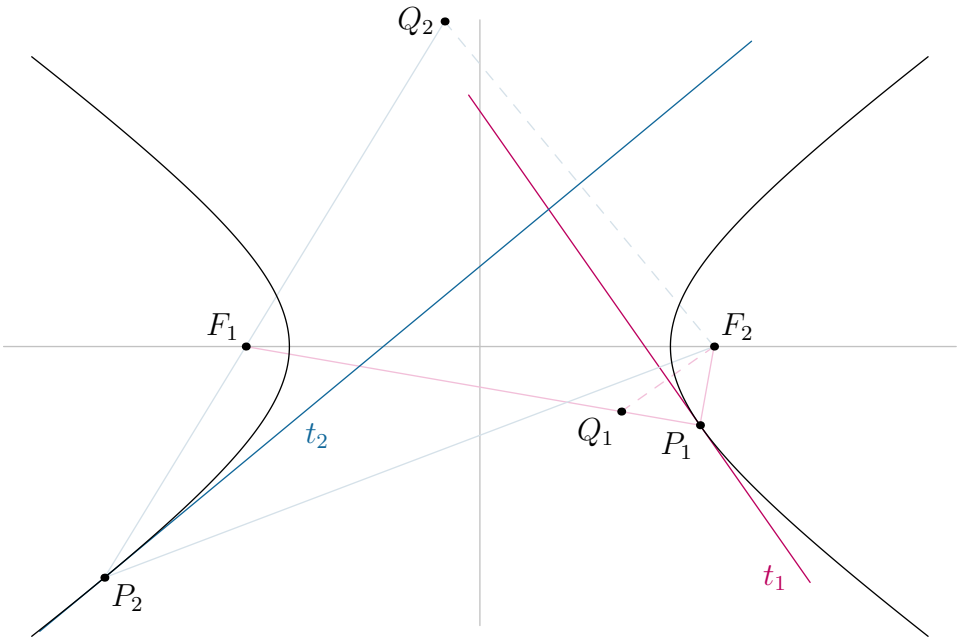
V každom prípade je X vonkajším bodom hyperboly, a preto je t dotyčnicou. Tvrdenie potom tak ako v prípade paraboly vyplýva z faktu, že dotyčnica v bode hyperboly je jediná. □

Veta 3.11.

(i) Body súmerne združené s jedným ohniskom hyperboly podľa všetkých jej dotyčníc včetne asymptôt (i.e. dotyčníc v nevlastných bodoch) tvoria kružnicu so stredom v druhom ohnisku a polomerom $2a$ (tzv. **riadiacu kružnicu hyperboly**).

(ii) Kolmé priemety ohniska paraboly na všetky jej dotyčnice tvoria kružnicu so stredom v strede hyperboly a polomerom a.

Dôkaz. (i) Podľa dôkazu Tvrdenia 3.10 ak uvažujeme dotyčnicu hyperboly v bode P ležiacom na vetve, ktorá je bližšie k F_2 ako k F_1, potom obraz F_2 podľa tejto dotyčnice leží na F_1P vo vzdialenosti $2a$ od F_1. Ak by sa bod P nachádzal na vetve bližšej k ohnisku F_1, jeho obraz v súmernosti podľa dotyčnice by ležal na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{F_1P}$, no jeho vzdialenosť od F_1 by zase bola rovná $2a$. V každom prípade teda obraz ohniska leží na kružnici g_1 so stredom F_1 a polomerom $2a$.



Zo spojitosti týmto spôsobom pokryjeme všetky body kružnice $g_1(F_1, 2a)$ okrem dvoch bodov, konkrétne obrazov ohniska F_2 podľa asymptôt.

(ii) Hľadaná množina je obrazom množiny bodov z časti (i) Tvrdenia v rovnoľahlosti so stredom v skúmanom ohnisku a koeficientom $1/2$. □

Na zamyslenie. Pri uvažovaní o dotyčniciach hyperboly s určeným smerom či dotyčniciach prechádzajúcich daným vonkajším bodom hyperboly je výhodné, podobne ako v prípade paraboly, nahliadať na hyperbolu ako na obraz kružnice v kolineácii. Uvažujte len dotyčnice vo vlastných bodoch hyperboly. Skúste odpovedať:

(i) Aké smery môžu mať dotyčnice hyperboly? Koľko dotyčníc hyperboly s daným smerom existuje?
(ii) Ktorými vonkajšími bodmi hyperboly možno viesť k hyperbole dve dotyčnice? Z ktorých bodov je možné zostrojiť iba jednu dotyčnicu?

Zadanie 16. Pre hyperbolu určenú ohniskami a jedným vrcholom a pre daný smer s zostrojte k hyperbole dotyčnice majúce smer s, ak existujú.

Postup konštrukcie. V konštrukcii sa oprieme o Vetu 3.11.

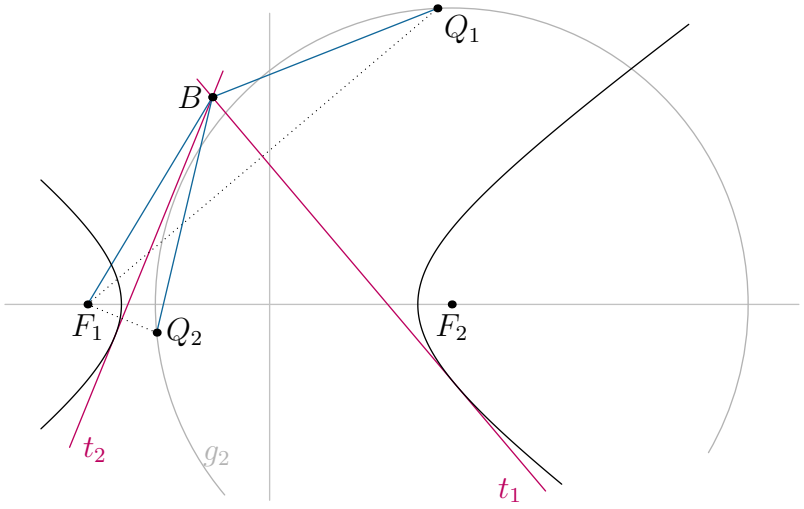
(1) S; S je stred hyperboly,
(2) k; $k(S, a)$ – k je kružnica dotýkajúca sa vrcholov hyperboly,
(3) l; $l \ni F_2$ a $l \perp s$,
(4) K; $K \in k \cap l$,
(5) t; $t \ni K$, $t \perp l$ – t je hľadaná dotyčnica.

Alternatívne môžme namiesto kružnice k využiť riadiacu kružnicu hyperboly:

(1) g_1; $g_1(F_1, 2a)$,
(2) l; $l \ni F_2$ a $l \perp s$,
(3) L; $L \in g_1 \cap l$,
(4) t; t je os F_2L – t je hľadaná dotyčnica.

Zadanie 17. Pre hyperbolu určenú ohniskami a jedným vrcholom a pre daný vonkajší bod zostrojte dotyčnice hyperboly prechádzajúce týmto bodom, ak existujú.

Rozbor. Využijeme znovu Vetu 3.11.



Nech F_1, F_2 sú ohniská hyperboly, a dĺžka hlavnej poloosi a B nech je daný vonkajší bod hyperboly. Obraz Q ohniska F_1 v súmernosti podľa dotyčnice t_i leží na riadiacej kružnici $g_2(F_2, 2a)$. Keďže bod B leží na dotyčnici t_i, platí, že $|BQ| = |BF_1|$.

Postup konštrukcie.

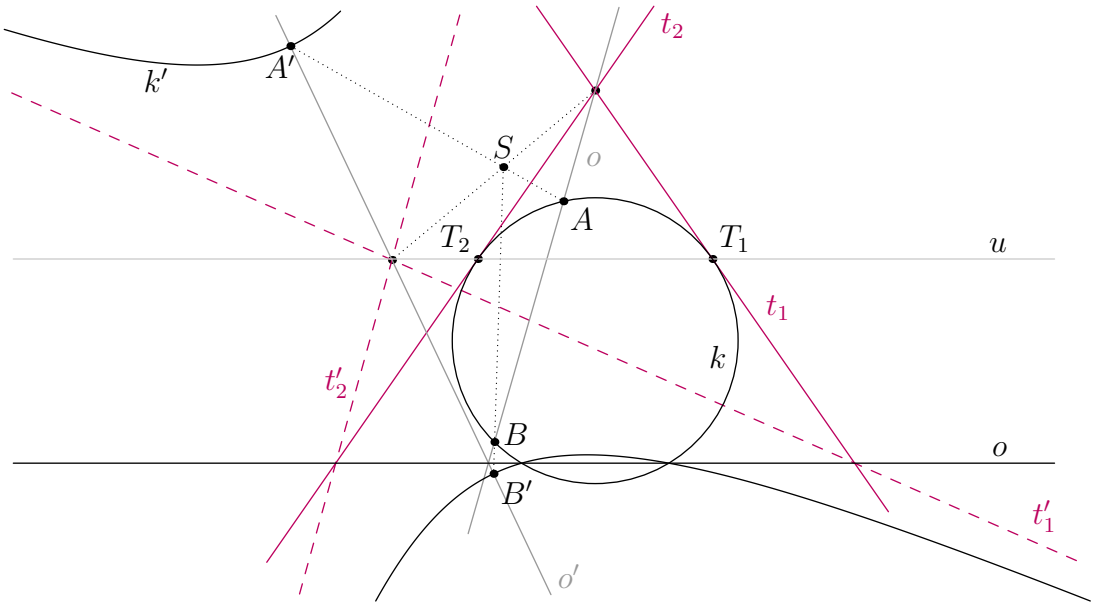
(1) g_2; $g_2(F_2, 2a)$,
(2) k; $k(B, |BF_1|)$,
(3) Q; $Q \in k \cap g_2$,
(4) t; t je os F_1Q – t je dotyčnica prechádzajúca bodom B.

Diskusia. Kružnica k vždy pretne kružnicu g_2 v dvoch bodoch, a to aj napriek tomu, že vo vonkajšej oblasti hyperboly existujú body, z ktorých nie je možné zostrojiť k hyperbole dve dotyčnice. V takých prípadoch namiesto dotyčnice týmto postupom zostrojíme asymptotu, čo je de facto tiež dotyčnica, akurát v nevlastnom bode.

3.4.2. *Hyperbola ako obraz kružnice v kolineácii.*

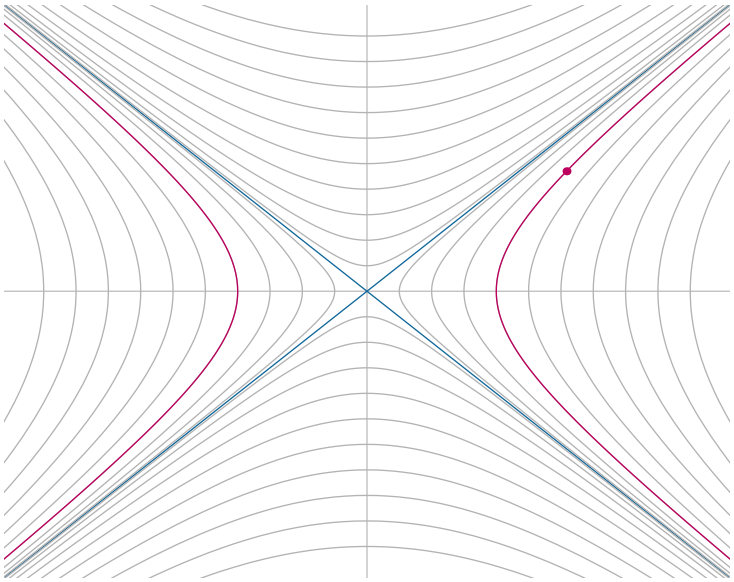
Zadanie 18. Nech κ je stredová kolineácia Nech úbežnica u (vzor nevlastnej priamky) pretína kružnicu k v dvoch bodoch. Zostrojte obraz k v kolineácii κ.

Postup konštrukcie. Nech S je stred, o os a u úbežnica kolineácie κ.



(1) T_1, T_2; $\{T_1, T_2\} = k \cap u$,
(2) t_i; t_i je dotyčnica k v bode T_i $(i = 1, 2)$,
(3) t_i'; $t_i' = \kappa(t_i)$ $(i = 1, 2)$ – t_i' sú asymptoty hyperboly k',
(4) o'; o' je os uhla priamok t_1', t_2',
(5) o; $o' = \kappa(o)$,
(6) A, B; $\{A, B\} = k \cap o$,
(7) A', B'; $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$ – A', B' sú vrcholy hyperboly k'.

Pre pevne zvolenú dvojicu rôznobežiek existuje veľa hyperbol takých, že dané rôznobežky sú jej asymptotami. Tieto hyperboly pokrývajú všetky body roviny okrem asymptôt a dve rôzne hyperboly sú navzájom disjunktné. Preto každým bodom neležiacim na žiadnej z asymptôt prechádza presne jedna hyperbola.



Zaujímavou otázkou je, ako túto hyperbolu skonštruovať, čiže ako nájsť nejaký určujúci prvok – keďže asymptoty sú známe stačí jedna z veličín a, b alebo e.

Táto konštrukcia môže byť užitočná napríklad aj pri hľadaní obrazu kružnive v kolineácii, viď predchádzajúce zadanie: ak úbežnica pretína kružnicu v dvoch bodoch, zobrazí sa v kolineácii na hyperbolu. Asymptoty tejto hyperboly vieme nájsť veľmi ľahko zobrazením priesečníka dotyčníc kružnice v jej priesečníkoch s úbežnicou. Pokiaľ má napríklad kružnica s osou kolineácie spoločný bod, máme hneď aj jeden bod hyperboly a týmito prvkami je hyperbola už jednoznačne určená.

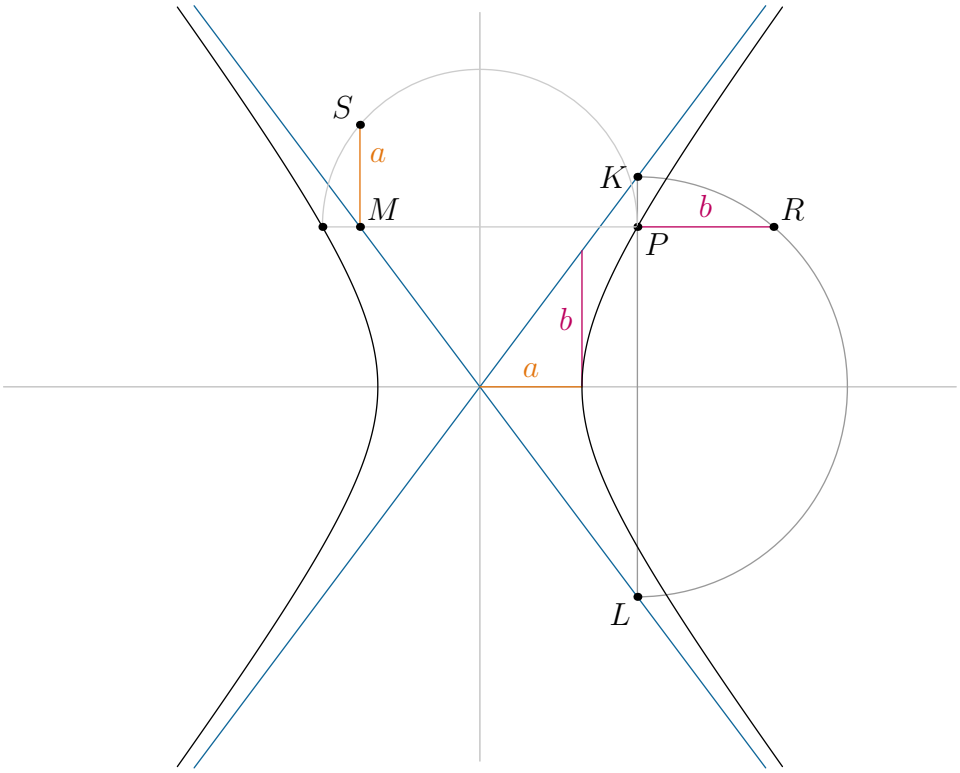
Zadanie 19. Dané sú asymptoty a jeden bod hyperboly. Nájdite vrcholy tejto hyperboly.

Rozbor. Nech a_1, a_2 sú asymptoty a P je bod hyperboly. Zavedieme si súradnice tak, aby hyperbola mala kanonický tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

teda asymptoty sú priamky

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$



Daný bod P hyperboly nech má súradnice $P = (p, q)$. Body K, L nech sú body na asymptotách s rovnakou x-súradnicou ako má bod P:

$$K = \left(p, \frac{b}{a}p\right), \quad L = \left(p, -\frac{b}{a}p\right).$$

Potom

$$|PK|.|PL| = \left(\frac{b}{a}p - q\right)\left(\frac{b}{a}p + q\right) = b^2\left(\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) = b^2.$$

Velkosť b sa preto rovná dĺžke úsečky PR, kde R je bod na kružnici nad priemerom KL kolmej na KL (viď obrázok).

Analogicky sa dá skonštruovať dĺžka a hlavnej poloosi: bude rovná dĺžke úsečky MS, viď obrázok.

Postup konštrukcie.

(1) o; o je os uhla asymptôt obsahujúceho bod hyperboly,
(2) l; $l \ni P$, $l \perp o$,
(3) K, L; $K = l \cap a_1$, $L = l \cap a_2$,
(4) k; k je Tálesova kružnica nad KL,
(5) R; $R \in k$, $PR \perp l$,
(6) pomocou $b = |PR|$ a asymptôt nájdeme požadované určujúce prvky hypeboly.

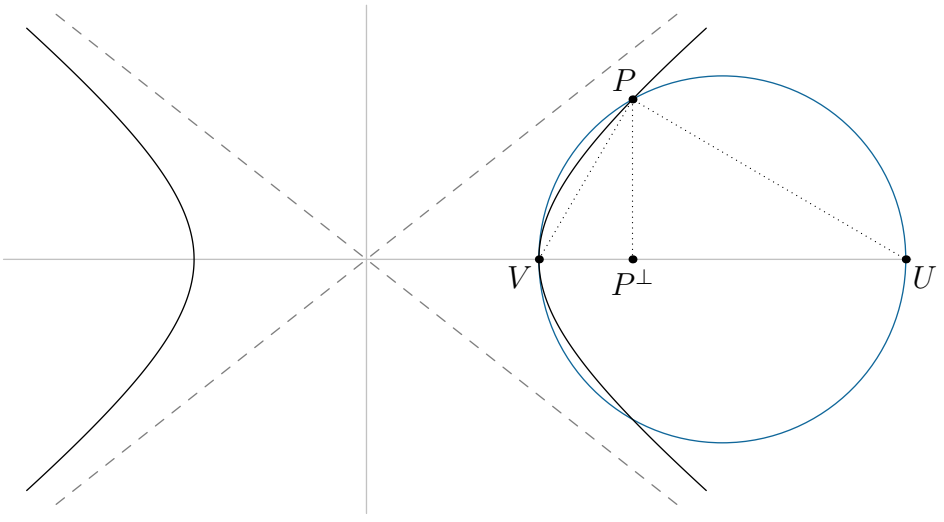
3.4.3. *Vizualizácia hyperboly.* Ako v prípade paraboly, aj hyperbolu môžme vykresliť tak, že s využitím jej metrickej definície skonštruujeme viacero bodov a následne načrtneme krivku, ktorá tieto body interpoluje. Ide o tzv. bodovú konštrukciu.

Ako u elipsy a paraboly, aj pri črtaní hyperboly je užitočné poznať polomer oskulačnej kružnice v jej vrcholoch. Situácia sa výrazne podobá na prípad elipsy.

Veta 3.12.

(i) Ak a je dĺžka hlavnej a b dĺžka vedľajšej poloosi hyperboly, potom polomer oskulačnej kružnice vrchole tejto hyperboly je b^2/a.
(ii) Nech S je stred elipsy, A nech je hlavný vrchol a $\triangle SAB$ nech je charakteristický trojuhlník hyperboly. Priamka p prechádzajúca bodom B a kolmá na asymptotu $\overleftrightarrow{SB}$ pretína os $\overleftrightarrow{SA}$ v strede oskulačnej kružnice vo vrchole A.

Dôkaz. (i) Pre nájdenie polomeru oskulačnej kružnice vo vrchole hyperboly použijeme jej analytické vyjadrenie.



Nech sa kružnica so stredom na hlavnej osi hyperboly dotýka hyperboly v jej vrchole a nech pretína túto vetvu hyperboly v ďalších dvoch podľa osi súmerných bodoch. Pre priesečník $P = (x, y)$ kružnice s polomerom r a hyperboly potom platí, že

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

keďže ide o bod hyperboly, a tiež platí, že

$$\frac{y}{x-a} = \frac{2r-(x-a)}{y},$$

lebo kružnica je Tálesovou kružnicou nad VU, a tak sú trojuholníky $\triangle VP^{\perp}P$ a $\triangle PP^{\perp}U$ podobné. Z druhej rovnosti vyjadríme y a po dosadení do prvej a malej úprave dostávame

$$(x-a)\left(\frac{x+a}{a^2} - \frac{2r-x+a}{b^2}\right) = 0.$$

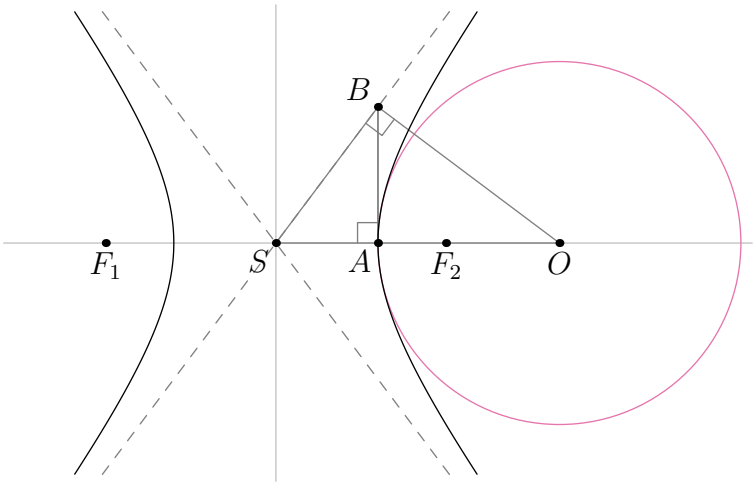
Riešenie $x = a$ nateraz ignorujme, keďže nás zaujíma podmienka pre polomer r. Dostávame tak, že

$$\frac{x+a}{a^2} - \frac{2r-x+a}{b^2} = 0.$$

Ako sa bod P blíži k vorcholu V, kružnica k sa stáva oskulačnou v tomto vrchole a v limite, keď $P = V$, a teda $x = a$, tak dostaneme polomer oskulačnej kružnice

$$r = \frac{b^2}{a}.$$

(ii)



Nech O je priesečník $\overleftrightarrow{SA}$ a p. Potom $\triangle OAB$ a $\triangle BAS$ sú podobné a preto pre dĺžky ich odvesien platí

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AS|},$$

kde $|AB| = b$, $|AS| = a$. Odtiaľ

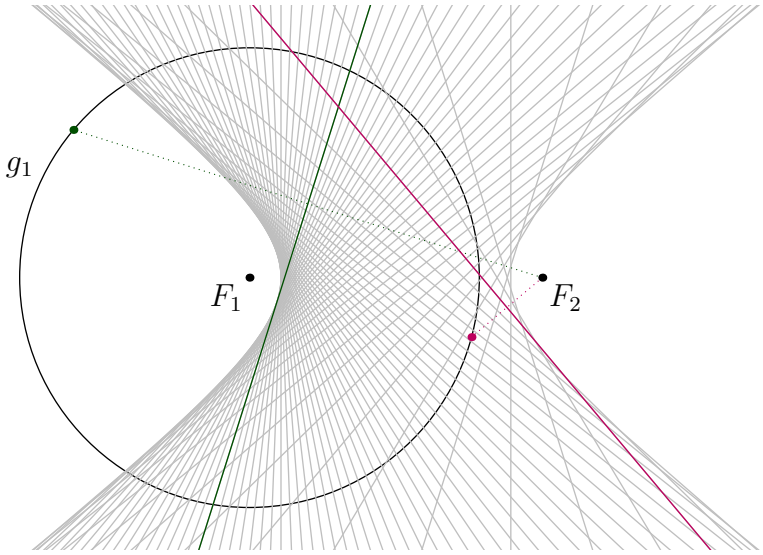
$$|OA| = \frac{b^2}{a},$$

a teda podľa (i) je O stredom oskulačnej kružnice vo vrchole A. □

Zadanie 20. (**Hyperbola ako obálka svojich dotyčníc.**) Podobne ako parabolu, môžme aj hyperbolu pomerne efektívne vizualizovať vykreslením jej dotyčníc.

Postup konštrukcie. Nech F_1, F_2 sú ohniská hyperboly a a nech je dĺžka jej hlavnej poloosi. Dotyčnice hyperboly konštruujeme podľa Vety 3.11:

(1) g_1; $g_1(F_1, 2a)$ – riadiaca kružnica hyperboly,
(2) nech D je ľubovoľný bod na riadiacej kružnici g_1,
(3) t; t je os F_2D – t je dotyčnica paraboly.

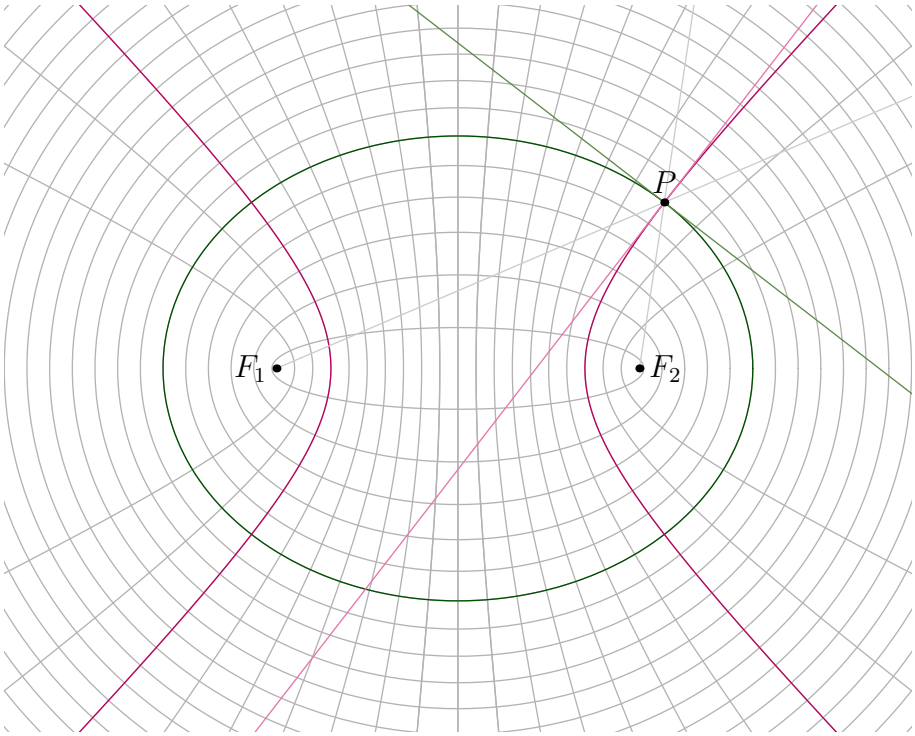


3.5. Dodatok: konfokálne kužeľosečky. Parabola je až na zhodnosť určená parametrom p, t.j. vzdialenosťou ohniska od riadiacej priamky. To znamená, že všetky paraboly s rovnakým parametrom p sú navzájom zhodné. Všetky paraboly až na zhodnosť teda tvoria jednoparametrickú triedu kriviek. Keď namiesto zhodností začneme uvažovať grupu podobností euklidovskej roviny, zistíme, že všetky paraboly sú si navzájom podobné.

Elipsa je naproti tomu určená dvoma parametrami: voľne si môžme zvoliť napríklad excentricitu e a dĺžku hlavnej poloosi a. Pre elipsy neplatí, že by všetky boli navzájom podobné. Podobné sú si presne tie elipsy, ktoré majú rovnaký pomer veľkostí e a a, teda presne tie elipsy, ktoré majú rovnakú numerickú excentricitu ϵ.

Taká istá situácia ako pre elipsy nastáva aj pri hyperbolách.

Majme teraz pevne zvolenú dvojicu navzájom rôznych bodov F_1 a F_2. Všetky elipsy, pre ktoré sú tieto dva body jej ohniskami (tzv. **konfokálne** elipsy), tvoria potom už len jednoparametrickú triedu kriviek. Tieto elipsy sú navzájom disjunktné a okrem úsečky F_1F_2 pokrývajú celú rovinu. Analogickú vlastnosť majú aj hyperboly s ohniskami F_1, F_2. Tieto dve tiedy konfokálnych kužeľosečiek tak tvoria v rovine akúsi sieť, o ktorej sa navyšie s nadobudnutými znalosťami o kužeľosečkách vieme už ľahko presvedčiť, že je ortogonálna:



Tvrdenie 3.13. Nech F_1, F_2 sú navzájom rôzne body. Elipsa s ohniskami F_1, F_2 a hyperbola s ohniskami F_1, F_2 majú v priesečníku navzájom kolmé dotyčnice.

Dôkaz. Nech P je bod ležiaci na elipse aj hyperbole. Priamky $\overleftrightarrow{F_1P}$ a $\overleftrightarrow{F_2P}$ sú sprievodičmi bodu P, či ho chápeme ako bod na elipse alebo ako bod na hyperbole. Vonkajší uhol sprievodičov bodu P vzhľadom na elipsu a vzhľadom na hyperbolu sú navzájom susednými uhlami a preto ich osi, ktoré sú zároveň dotyčnicami elipsy a hyperboly, sú na seba kolmé. □

Poznámka 3.14. V degenerovanom prípade, ked by boli body F_1 a F_2 totožné, elipsy by sa stali kružnicami a namiesto hyperbol by sme mali tzv. **singulárne kužeľosečky hyperbolického typu**, čiže dvojice rôznobežiek. Krivky vo výslednej sieti, sústredné kružnice a polpriamky so začiatkom v splývajúcich ohniskách, by tak boli množinami bodov, ktoré vzhľadom na polárne súradnice majú jednu zo súradníc konštantnú.

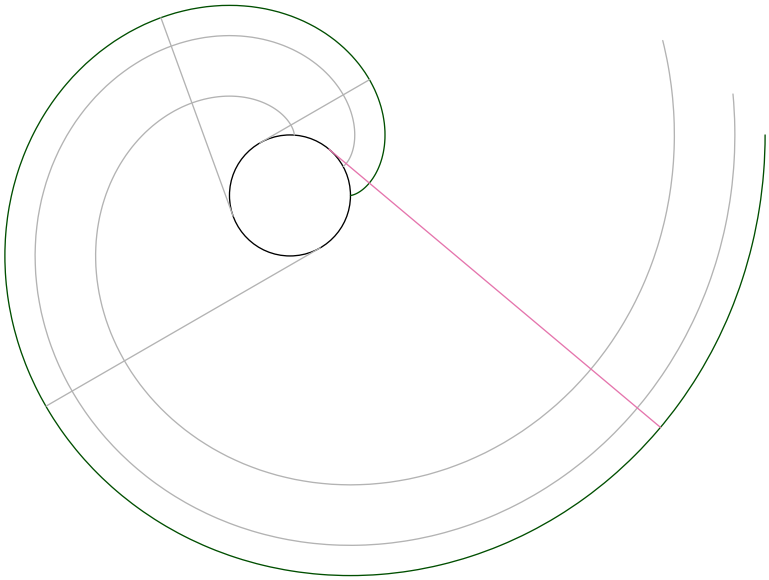
Ak namiesto polárnych súradníc uvažujeme štandardnú karteziánsku súradnicovú sústavu, vidíme, že tá má tú istú vlastnosť, ako sme overili v Tvrdení: krivky pozostávajúce z bodov, ktorých jedna zúradnica je konšantná a druhá nadobúda ľubovoľnú hodnotu (t.j. vodorovné a zvislé priamky) tvoria ortogonálnu sieť.

Na zamyslenie. Vedeli by ste analogickú situáciu namodelovať pomocou parabol? Parabola má na rozdiel od hyperbol a elíps iba jedno ohnisko, skúste preto použiť dve jednoparametrické triedy parabol.

3.6. Dodatok: evolventa krivky.

Príklad 3.15. Predstavme si, že z kružnice začneme odvíjať vlákno, ktoré akoby bolo predtým na kružnici pevne navinuté. V každom momente tak odvinutá časť vlákna leží na dotyčnici ku kružnici. Začiatok vlákna potom vykresľuje krivku sa tak

pohybuje po krivke v tvare špirály s konštantnou vzdialenosťou (konkrétne dĺžkou obvodu kružnice) medzi závitmi. Túto krivku nazývame **evolventa** kružnice.



Ak by sme vlákno začali odvíjať v inom bode kružnice, dostali by sme inú evolventu, ktorá by z pôvodnej vznikla rotáciou okolo stredu danej kružnice. Máme takto jednoparametrickú množinu kriviek, ktoré sú navzájom disjunktné a okrem vnútra kružnice pokrývajú celú rovinu.

Ako druhú triedu kriviek uvažujme polpriamky, na ktorých ležia odvíjajuce sa vlákna, teda časti dotyčníc kružnice. Tieto dve triedy tiež tvoria ortogonálnu sieť kriviek.

diferenciála geometria?

Analogicky môžme skonštruovať evolventu aj iným krivkám (k parabole, k hyperbole) a znovu tak získame ortogonálny sieť.

Poznámka 3.16. Iný príklad ortogonálnej siete kriviek môžte nájsť na mapách: jednu triedu kriviek tvoria vrstevnice, druhú spádnice

fokálne kuželosečky? -
že na hyperbole ide o body, “z ktorých vidno elipsu ako kružnicu”

pedal-point constructions of conics?

Literatúra

[1] A. V. Akopyan and A. A. Zaslavsky. **Geometry of conics**, volume 26 of **Mathematical World**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. Translated from the 2007 Russian original by Alex Martsinkovsky.

[2] Marcel Berger. **Geometry 2**. Springer-Verlag, 2nd edition, 2009.

[3] Georg Glaeser, Hellmuth Stachel, and Boris Odehnal. **The universe of conics—from the ancient Greeks to 21st century developments**. Springer, Berlin, second edition, [2024] ©2024.

[4] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. **Geometry and the imagination**. Chelsea Publishing Co., New York, 1952. Translated by P. Neményi.