# Základy fyziky (1)
# Cvičenie 4

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

*Cvičenie bolo 26. 10. 2026*

---

**Príklad 1** (■). Napíšte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor v dvoch rozmeroch s potenciálom

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2$$

a vyriešte ju. Ukážte, že v prípade $\omega_x = \omega_y$ ide o pohyb po elipse a rozmyslite si, že vo všeobecnom prípade ide o komplikovaný pohyb.

**Príklad 2** (■). Majme silové pole ako na prednáške $\vec{F} = (-y, x, 0)$. Skúste nájsť pre toto pole potenciál integrovaním a zistite, kde je problém. Vypočítajte pre toto pole $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ a ukážte, že nie je potenciálové. V rovine $xy$ zvoľte ako krivku kružnicu s polomerom $R$ a stredom v počiatku a overte pre ňu platnosť Stokesovej vety.

**Príklad 3** (■). Ukážte, že pre centrálny potenciál sa veličina $\vec{L} = m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ zachováva. Nájdite tento vetkor a jeho veľkosť v polárnych súradniciach.

**Príklad 4** (■). Vyšetrite pohyb telesa v symetrickom trojrozmernom harmonickom potenciáli $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0 r^2$.

**Príklad 5** (■ Voľné teleso – obľúbený triviálny prípad. I ). Vyriešte úlohu pohybu voľného telesa $V(r) = 0$ ako pohyb v centrálnom potenciáli.

**Návod.** Pomôže zvoliť súradnice tak, aby teleso neprechádzalo počiatkom a natočiť ich tak, aby v čase $t = 0$ bolo k počiatku najbližšie.

**Príklad 6.** Nájdite množinu všetkých bodov v priestore, ktoré vieme trafiť kameňom, ktorý hádžeme v homogénnom gravitačnom polu zo zadaného miesta fixovanou veľkosťou rýchlosti $v_0$.

**Príklad 7.** Z povrchu zeme hádžeme v homogénnom gravitačnom poli kameň. Vieme ho hodiť rýchlosťou veľkosti $v_0$. Bez odporu vzduchu dohodíme najďalej ak hádžeme pod uhlom 45°. V prípade lineárneho odporu $\vec{F} = -\kappa\vec{v}$ je tento uhol komplikovane závislý na $v_0$, ale môžete skúsiť dokázať nasledujúce tvrdenie. Ak uhol, pri ktorom doletí kameň najďalej označíme $\alpha$ a uhol, pri ktorom v takom prípade dopadne označíme $\beta$, potom platí $\alpha + \beta = 90°$.

---

Z nasledujúcich príkladov si vyberte dva. Ostatné sú potom šanca získať bonusové body.

**Príklad 8.** Teleso vrhneme rýchlosťou $v_0$ šikmo pod uhlom $\alpha$ a teda $\vec{x}(0) = (0, 0, 0), \vec{v}(0) = (v \cos\alpha, v \sin\alpha, 0)$. Teleso sa bude pohybovať v gravitačnom poli $\vec{F} = (0, -mg, 0)$.

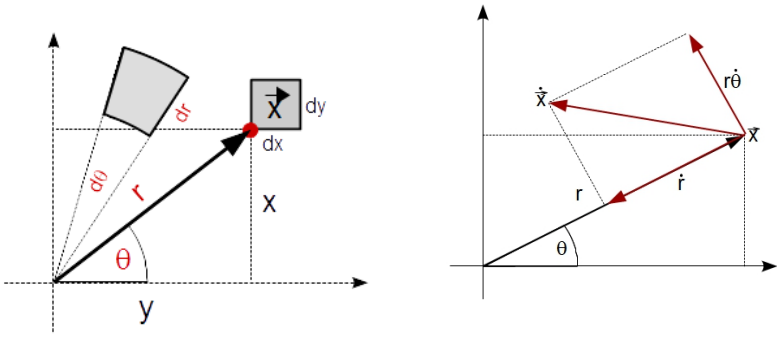
a. Zapíšte a vyriešte pohybové rovnice v tomto prípade. Vyjadrite dráhu telesa ako $y(x)$ a ukážte, že ide o parabolu.

b. Za aký čas teleso dopadne? Ako ďaleko dopadne? Do akej maximálnej výšky sa teleso dostane? Pre aké hodnoty uhla $\alpha$ sú tieto výsledky najväčšie?

c. Teleso hádžeme rovnako ako predtým, ale pred nami sa nachádza kopec so sklonom $\beta < \alpha$. Do akej vzdialenosti hore kopcom teleso doletí?

d. Ako najďalej pozdĺž kopca vieme teleso vyhodiť?

**Príklad 9.** Ukážte, že z vyjadrenia $x, y$ v polárnych súradniciach




$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$

dostaneme vzťah pre rýchlosť

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \ .$$

a pre zrýchlenie

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \ .$$

**Príklad 10.** Rozmyslite si, že pre gravitačnú silu

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \ ,$$

platí v polárnych súradniciach roviny, v ktorej sa teleso pohybuje, pre moment hybnosti

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

a pre energiu

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \ .$$