Ako odhalit nespravny vysledok

Juro Tekel juraj.tekel@gmail.com

Poznamky k prednaske o tom, ako sa da pri pohlade na vysledok zistit, ci moze alebo nemoze byt dobre, spolu s niekolkymi prikladmi na precvicenie.

April 2009

---

na uvod si zopakujme, pripadne sa naucme trocha zakladnej matematicky

- delenie nulou je zle a nerobime ho a vzdy ked ho od nas niekto chce tak ho vysmejeme
- niektore funckie sa kamaratia iba s niektorymi cislami, pre nas dolezita bude, odmocnina, ktore nema rada zaporne cisla, ale nulu moze; su tu este rozne logaritmusi a arkusi a podobne, tie treba mat tiez v pamati
- delit nulou je zle, ale ... ale delit malimi cislami zle nie je, a ked si davame pozor, tak sa to moze zacat podobad na delnie nulou

preco je dolezite odhalit nespravny vysledok

- nie vzdy vieme zistit, aky je spravny vysledok ulohy; najma nie na pisomkach, skuskach, pri rieseni naboja ci akychkolvek inych uloh, preto je fajn vediet zistit, ze to co hodlame odovzdat je nezmysel
- ked riesime problemy, ktore este vyriesene nie su, napriklad zadavame priklad alebo riesime nejaky 'ozajstny' problem a vtedy jedina sanca, ako zistit, ci nas vysledok moze byt spravny je takyto postup

vsetko toto je dobre robit priebezne pocas celeho riesenia ulohy, nie len s vyslednym vztahom

podla toho, kde a ako sa nam vztah kazi sa da odhadnut, kde sme spravili chybu

a ako sa to teda robi

Rozmerova analyza 1,2

- zakladna a najjednoduchsia metoda, ktora sa da velmi jenoducho skusat priebezne pocas pocitania
- je dobre mat v oku zopar kombinacii, ktore sa casto vyskytuju spolu, ako su mg, kT, netreba vediet nutne rozmery vsetkeho, casto staci vediet, ake kombinacie maju ake rozmery
- davat pozor na to, ze argumenty exponent, logartimov, sinusov atd musia byt bezrozmerne

Matematicke nezrovnalosti

- nemozme krmit funckie cislami, ktore sa im nepacia
- niekedy ma 'vysledok' velmi specialne riesenie pre velmi nespecialne hodnoty parametrov

Symetrie uloh 3,4,11

- symetria - v ulohe nieco zmenime, ale uloha zostane napriek tomu rovnaka, pripadne sa zmeni rovnaku ulohu v trochu inom prevedeni
- ak ma uloha nejaky symetriu, aj riesenie musi mat tuto symetriu
- najcastejise zrkadlova symetria a symetrie vymienania objektov a parametrov objektov

Hranicne a specialne pripady 2,3,5

- najtazsia metoda, ale metoda ktora dokaze odhalit najviac

- pre extremne (tj. nulove, nekonecne, rovnake) hodnoty parametrov je casto velmi lahke uhantu riesenie a spravny vysledok nema inu sancu len pre tieto hodnoty pramatrov toto riesenie davat
- niekedy je nulovost jedneho parametra to iste, ako nekonecnost ineho, niekedy nie - napriklad 5,6 vs. 3,7
- pozor na limity menovatelov

Zmena parametrov

- je dobre vediet, ako sa ocakavany vysledok bude menit so zmenou parametrov ulohy
- potom vieme zistit, ci kandidat na vysledok splna tieto ocakavania

Radove odhady, znamienka

metoda skor pre prakticke ulohy, kde ocakavame rozmny vysledok po dosadeni rozmnych hodnot alebo dosadenim konkretnych hodnot overime znamienko vysledku

tak isto mozne podla vysledkeho vztahu len radovo odhadnut vysledok a porovnat so skutocnostou

Priklady

Nasleduje niekolko prikladov, kde sa tieto zrucnosti daju precvicit. V kazdom z prikladov je spravny prave jeden vysledok. Pouzite su priklady zo zbierok Naboja FKS.

Priklad 1. *Fontana strieka vodu do vysky H. Vo vzduchu je vzdy hmotnost M vody. Aky je vykon cerpadla fontany?*

a. $P = \frac{MH}{2}\sqrt{gH}$

b. $P = \frac{gM}{2}\sqrt{gH}$

c. $P = \frac{MgH}{2}$

Priklad 2. *V nadobe s objemom V sa nachdza hmotnost m_1 plynu 1 hmotnost m_2 plynu 2. Aky je pri teplote T tlak vnutri tejto nadoby? Molove hmotnosti plynov su M_1 a M_2*

a. $p = \frac{RT}{V}(m_1 + m_2)$

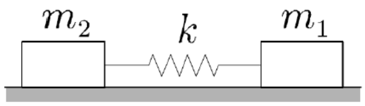
b. $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1+m_2}{M_1+M_2}\right)$

c. $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)$

d. $p = \frac{V}{RT}\left(\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}\right)$

e. $p = \frac{RT}{V}\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}$

Priklad 3. *Na dokonale hladkej vodorovnej podlozke je pruzina s tuhostou k, na ktorej koncoch su dve zavazia s hmotnostou m_1 a m_2. Aka bude perioda kmitov sustavy, ak niektore zo zavazi vychylime z rovnovaznej polohy? Ak neviete, tak vedzte, ze perioda kmitov zavazia hmotnosti M na pruzine tuhosti k je $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$*



a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1-m_2}{k}}$

c. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$

d. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1^2-m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$

e. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{2k(m_1+m_2)}}$

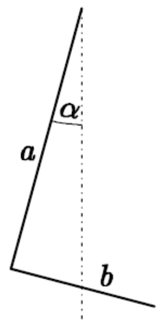
Priklad 4. *Dve rovnake gulicky proti sebe letia rychlostami v a u. Ake su ich rychlosti po zrazke?*

a. $v' = -u, u' = v$

b. $v' = -u, u' = 2v$

c. $v' = -\frac{u-v}{u+v}u, u' = \frac{u-v}{u+v}v$

Priklad 5. *Zalomena tyc tvaru L s ramenami z rovnakeho materialu dlzky a, b je upevnena v koncovom bode ramena a tak, ze sa moze otacat okolo vodorovnej osi prechadzajucej bodom upevnenia kolmo na rovinu urcen ramenami tyce. Aky uhol zviera rameno a zalomenej tyce so zvislym smerom v rovnovnej polohe?*



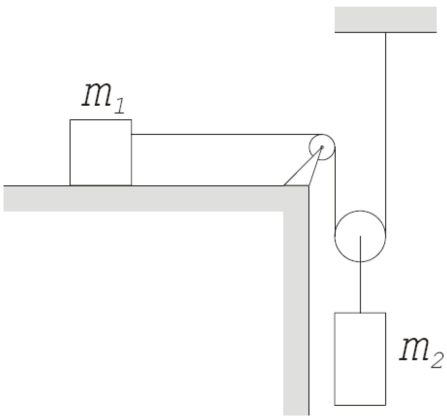
a. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b^2}{b^2+2ba}$

b. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{b^2+2ba}$

c. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2+2ba}$

d. $\sin\alpha = \frac{b^2}{b^2+2ba}$

Priklad 6. *Urcte zrychlenie telesa m_1 sustavy na obrzku. Trenie ani hmotnost kladky neuvazujte.*



a. $a = \frac{m_1}{2m_1+m_2}g$

b. $a = \frac{2m_2}{4m_1+3m_2}g$

c. $a = \frac{2m_2}{4m_1+m_2}g$

d. $a = \frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}g$

Priklad 7. *Pohyblive schody prenesu stojaceho pasaziera z jedneho podlazia na druhe za cas t_1. Ak pohyblive schody stoja, prejde po nich pasazier z jednho podlazia na druhe za cas t_2. Za aku dobu prejde pasazier (ak kraca) po pohybujucich sa schodoch z jedneho podlazia na druhe (pasazier ide v smere pohybujucich sa schodov)?*

a. $T = \frac{t_1^2}{t_1+t_2}$

b. $T = \frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$

c. $T = \frac{t_1t_2}{t_1-t_2}$

d. $T = \frac{t_1^2t_2^2}{t_1^3+t_2^3}$

e. $T = \frac{t_1^2+t_2^2}{t_1+t_2}$

Priklad 8. *Vzdialenost medzi dvoma stanicami presiel vlak priemernou rychlostou v_0 za cas t. Rozbiehanie a brzdenie trvalo spolu cas t_1, zvysny cas sa vlak pohyboval rovnomernym pohybom. Ak bola rychlost v vlaku pocas rovnomerneho pohybu? Rozbiehanie a brzdenie povazujte za rovnomerne zrychleny,resp. spomaleny pohyb.*

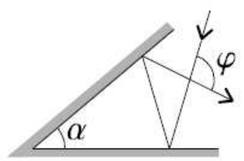
a. $v = v_0\frac{t}{2t-t_1}$

b. $v = v_0\frac{2t}{2t-t_1}$

c. $v = v_0\frac{t+t_1}{t-t_1}$

d. $v = v_0\frac{t+t_1}{2t-t_1}$

Priklad 9. *Dve zrkadl zvieraju uhol α. Dopadajuci luc sa najskor odrazi od prveho, potom od druheho (pozri obrzok). Ak uhol φ zviera vstupujuci a vystupujuci luc?*



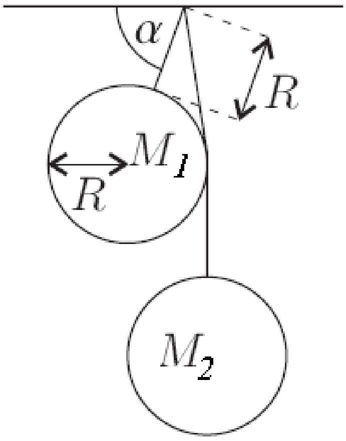
a. $\varphi = 2\alpha$

b. $\varphi = 180° - 2\alpha$

c. $\varphi = 90° - \alpha$

d. $\varphi = 360° - 2\alpha$

Priklad 10. *Z vodorovnho stropu visi na spagate dlzky R gula s polomerom R a hmotnosti M_1. Z rovnakeho miesta visi na dostatocne dlhom spagate druh gula s hmotnostou M_2. Gule sa nedotykaju a medzi spagatom a prvou gulou nie je trenie. Ak uhol zviera prvy spagat so stropom?*



a. $\cos\alpha = \frac{M_2}{2(M_1+M_2)}$

b. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{M_1}{2(M_1+M_2)}$

c. $\sin\alpha = \frac{M_2}{2(M_1+M_2)}$

d. $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{M_2}{2M_1}$

Priklad 11. *Do stojacej gulicky hmotnosti M vrazi gulicka hmotnosti m, ktora sa pohybovala rychlostou v. Akymi rychlostami w, W sa budu gulicky pohybovat po zrazke?*

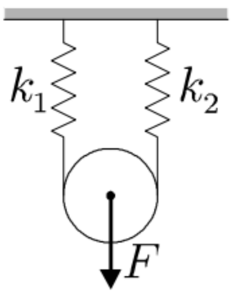
a. $W = \frac{2m}{M+m}, w = v\frac{m-M}{M+m}$

b. $W = \frac{2m}{M+m}, w = v\frac{M-m}{M+m}$

c. $W = \frac{2m}{M+m}, w = v\frac{m-2M}{2M+m}$

d. $W = \frac{2M}{M+m}, w = v\frac{M+m}{M+m}$

Priklad 12. *Nehmotna kladka je zavesena cez nitku na dve pruzinky roznej tuhosti k_1 a k_2. O aku dlzku sa posunie kladka, ak na nu budeme posobit silou F?*



a. $x = F\frac{k_1+k_2}{k_1^2+k_2^2}$

b. $x = F\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}$

c. $x = F\frac{k_1+k_2}{4k_1k_2}$

d. $x = F\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}$

Priklad 13. *Dve rovnake telesa s teplotami T_1, T_2 dame do tepelneho kontaktu a nechame ustalit. Aka bude ich vysledna teplota*

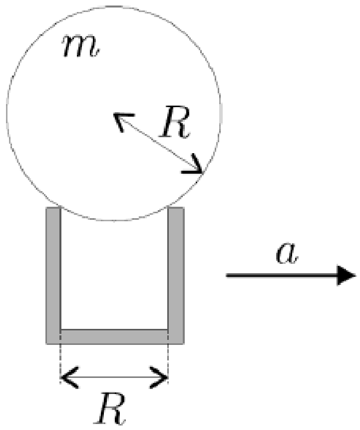
a. $\sqrt{T_1T_2}$

b. $\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}$

c. $\frac{T_1T_2}{T_1+2T_2}$

d. $\frac{1}{2}(T_1+T_2)$

Priklad 14. *Dokonale hladky homogenny valec s hmotnostou m je polozeny na voziku, ktoreho vzdialenost medzi prednou a zadnou stenou je rovnaka ako polomer podstavy valca R (obrazok). Vozik sa zacne pohybovat so zrychlenim a. Najdite velkost sil N_1 a N_2, ktore posobia na zadnu a prednu stenu vozika.*



a. $N_1 = \frac{ma}{\sqrt{3}}$, $N_2 = \frac{ma}{\sqrt{3}}$

b. $N_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}} + ma$, $N_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}} - ma$

c. $N_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}} + ma$, $N_2 = \frac{ma}{\sqrt{3}} - 2ma$

d. $N_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}} + m\frac{a^2}{g}$, $N_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}} - m\frac{a^2}{g}$

Priklad 15. *Cez nehmotnu kladku je prevesene lano, na koncoch ktoreho su telesa s hmotnostou m_1 a m_2. Ake je zrychlenie tychto telies. Smer nadol zoberme ako kladny.*

a. $a_1 =$, $a_2 =$

b. $a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}g$, $a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}g$

c. $a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+3m_2}g$, $a_2 = \frac{2m_2-m_1}{m_1+m_2}g$

d. $a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$, $a_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$

Priklad 16. *Clovek hadze z okraja utesu vysokeho h kamen rychlostou v pod takym uhlom aby, aby doletel co najdalej. Ako daleko kamen doleti?*

a. $D = \frac{gh^2}{v^2}$

b. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)^2$

c. $D = \frac{v^2}{g}$

d. $D = \sqrt{\frac{v^2 h}{g}}$

e. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)$

f. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}$

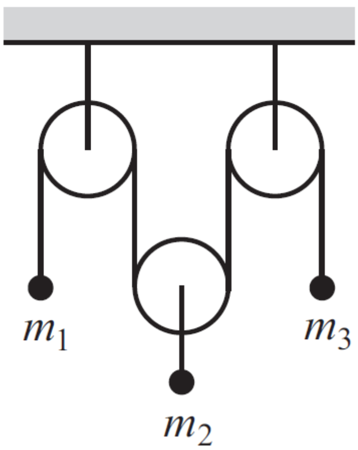
g. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1+\frac{2gh}{v^2}}$

h. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1-\frac{2gh}{v^2}}$

Priklad 17. *Pre sustavu kladiek ako na obrazku vam vysiel vysledok pre zrychlenie telesa s hmotnostou m_1 nasledovne*

$$g\frac{3m_2m_3 - m_1(4m_3 + m_2)}{m_2m3 + m_1(4m_3 + m_2)}$$

Ako by ste ma presvedcili, ze tento vysledok ma sancu byt spravne?



Priklad 18. *Aky je objem zrezaneho kuzela, koreho horna podstava ma polomer a a spodna polomer b?*

a. $V = \frac{\pi h}{3}(a^2 + b^2)$

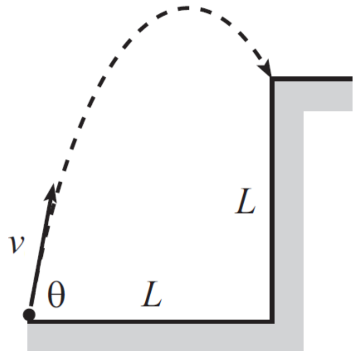
b. $V = \frac{\pi h}{2}(a^2 + b^2)$

c. $V = \frac{\pi h}{3}(a^2 + ab + b^2)$

d. $V = \frac{\pi h}{2}\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$

e. $V = \pi hab$

Priklad 19. *Vo vzdialenosti L od utesu vysky L hadzeme kamen pod uhlom θ. Akou velkou rychlostou ho mame hodit, aby trafil presne roh utesu?*



a. $v = \sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta - 1)}}$

b. $v = \sqrt{\frac{gL}{2\tan\theta - 1}}$

c. $v = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta - 1)}}$

d. $v = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta + 1)}}$

e. $v = \sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta + 1)}}$

Priklad 20. *Ake je pravidlo pre relativisticke skladanie rychlosti v_1 a v_2?*

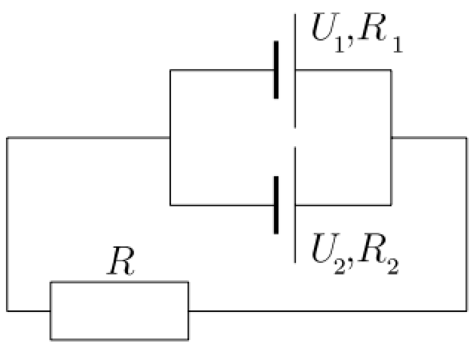
a. $v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$

b. $v = \frac{v_1+v_2}{1-v_1v_2/c^2}$

c. $v = \frac{v_1^2+v_2^2}{c}\left(1 + v_1v_2/c^2\right)$

d. $v = \frac{v_1-v_2}{1+v_1v_2/c^2}$

Priklad 21. *Kleof m rezistor s odporom R a dva zdroje s naptm U_1 resp. U_2 a vntornmi odpormi R_1, resp. R_2. Zapojil ich podla obrzka. Ak prd pretek rezistorom s odporom R.*



a. $I = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$

Priklad 22. *Majme kuzel s vrcholovym uhlom 2α, ktoreho vnutorna strana je pokryta zrkadlovym povrchom. V jeho vrchole je umiestneny detektor s gulovym povrchom s polomerom r. Vo vzdialenosti a od vrcholu kuzela sme na jeho os umiestnili zdroj svetla. Aka cast svietiveho vykonu zdroja dopadne na detektor?*

a. $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right)$

Priklad 23. *Z vysky H nechame volne padat gulocku. Po prvom odraze sa odrazi do vysky $h < H$. Ak gulicka pri odraze od zeme strati vzdy rovnaku cast svojej kinetickej energie, za aky cas jej pohyb uplne zastavi?*

a. $T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{\sqrt{H}+\sqrt{h}}{\sqrt{H}-\sqrt{h}}$

Priklad 24. *Na smykacke s dlzkou l a sklonom voci vodorovnej rovine α sa smyka dieta. Ak je koeficient trenia medzi dietatom a smykackou f, aku bude mat dieta rychlost na konci smykania?*

a. $v = \sqrt{2lg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$

Priklad 25. *Obezna doba Merkura okolo Slnka je T_1, obezna doba Venuse okolo Slnka je T_2. S akou periodou dochadza k maximalnemu priblizeniu tychto dvoch planet?*

a. $T = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$

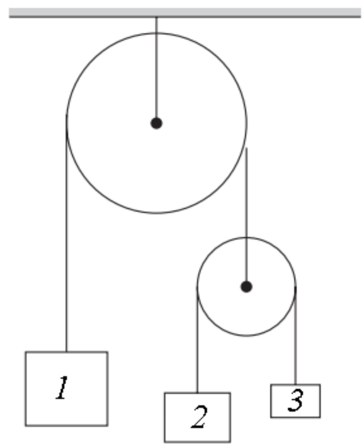
Priklad 26. *Dvaja motocyklisti jazdia po kruhovych drahach so spolocnym stredom ale roznym polomerom. Jeden prejde jedno kolo za cas T_1, druhy za cas T_2. S akou periodou dochadza k maximalnemu priblizeniu motocyklistov?*

a. $T = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}$

Priklad 27. *Na urychlovaci LHC v CERNe sa pohybuju po kruhovej drahe s dlzkou l pohybuju protony s energiou E. Ak poznate pokojovu hmotnost protonu m_0 a jeho naboj q, najdite magneticke pole, ktore musi posobit na urychlovany proton.*

a. $B = \frac{2\pi E}{lqc}\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2}$

Priklad 28. *Ake je zrychlenie telies na obrazku? Ako uz byvazvykom, kladky su nehmotne, lana su dokonale pevne.*



a.

$$a_1 = g\frac{4m_2m_3 - m_1(m_2+m_3)}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}$$
$$a_2 = g\frac{m_1(3m_3 - m_2) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}$$
$$a_3 = g\frac{m_1(3m_2 - m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}$$

b.

$$a_1 = g\frac{4m_2m_3 - m_1(m_2+m_3)}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}$$
$$a_2 = g\frac{m_1(3m_3 - m_2) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}$$
$$a_3 = g\frac{m_1(3m_3 - m_2) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}$$

c.