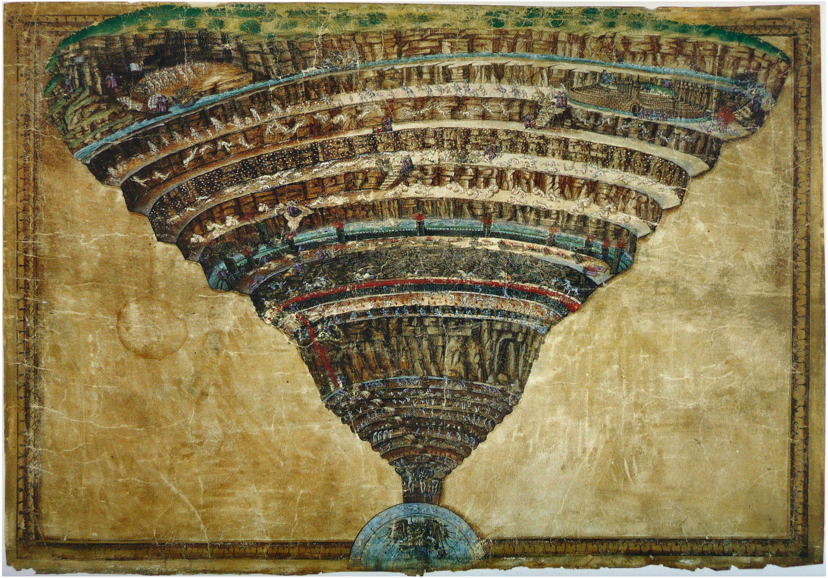
Ako si nájsť chybu?
Čo a ako sa pýtať výsledkov

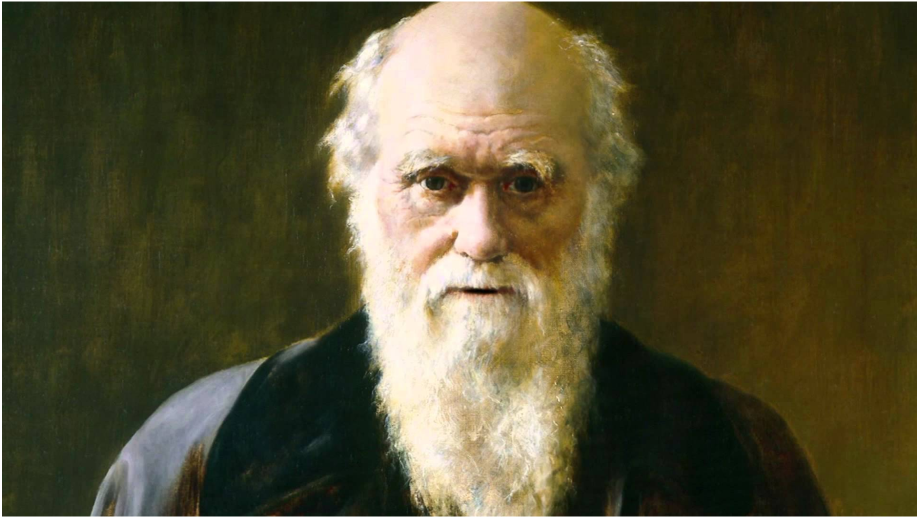
Juraj Tekel

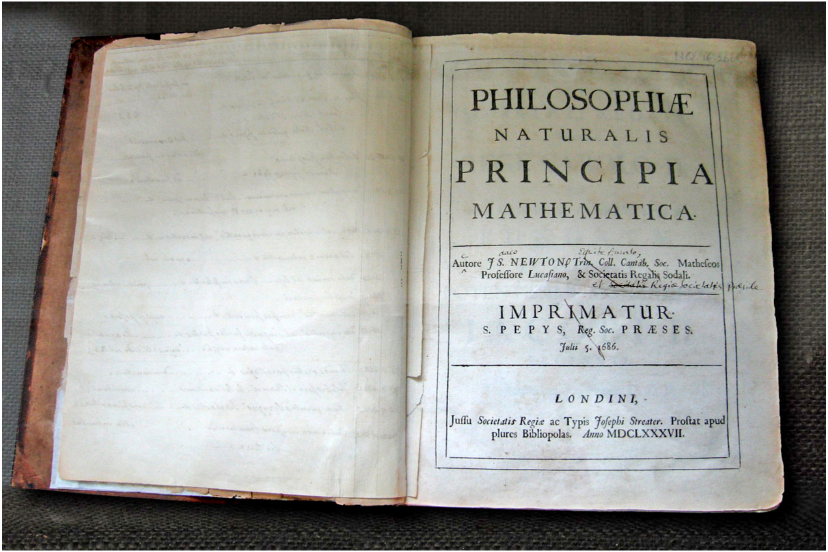
Katedra teoretickej fyziky a didaktitky fyziky
FMFI, UK

Letná škola FKS/TMF
29.7.2016


Historia est
magistra vitae.






PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Keby ste sa nudili

- Túto prezentáciu a množstvo ďalších príkladov nájdete na

  `davinci.fmph.uniba.sk/~tekel1`

Prečo je dôležité vedieť odhaliť nesprávny výsledok

Prečo je dôležité vedieť odhaliť nesprávny výsledok

- pomôže vyvarovať sa chýb na písomkách, skúškach, súťažiach
- dokáže odhaliť chyby v prezentáciách a ako oponent dostať prezentujúceho do úzkych
- keď vymýšľame nové úlohy alebo riešime nové problémy, tak riešenie nepoznáme a musíme sa uistiť, že náš výsledok je správny
- často pomôže odhaliť chybu aj počas riešenia, ak si človek jedným očkom dáva pozor na to, čo robí
- často pomôže odhaliť kde sa chyba stala, keď nájdeme miesto, kde medzivýsledky prestanú byť správne
- „Aha!“ momenty, z výsledku sa môžeme naučiť niečo nové, čo sme na začiatku nevideli

Prečo je dôležité vedieť odhaliť nesprávny výsledok

- ukážeme si niekoľko metód, ako sa zo vzorca dá zistiť, či má šancu byť správne
- trochu iné ako ostatné prednášky, lebo toto je vec ktorú sa človek učí celý život

Dva krát podčiarknuť a odovzdať/ísť ďalej je jedna z najhorších chýb, ktoré môžete spraviť. Nad výsledkom sa treba vždy zamyslieť a porozmýšľať, či dáva zmysel, čo z neho vyplýva a čo sa z neho môžeme naučiť.

Vzorový príklad

Tu bude zadanie príkladu.

1. Tu budú rôzne možné výsledky.
2. Úlohou nie je príklad vypočítať.
3. Ale prísť na to, ktoré z ponúkaných výsledkov sú určite nesprávne.

Rozmerová analýza

Rozmerová analýza

- najjednoduchšia metóda, ale prekvapujúco účinná
- založená na tom, že fyzikálne veličiny majú jednotky a teplota nevychádza v metroch kubických
- netreba si nutne pamätať čo presne je J, ale pomôže vedieť aké rôzne kombinácie veličín takúto jednotku dávajú

Rozmerová analýza

- najjednoduchšia metóda, ale prekvapujúco účinná
- založená na tom, že fyzikálne veličiny majú jednotky a teplota nevychádza v metroch kubických
- netreba si nutne pamätať čo presne je J, ale pomôže vedieť aké rôzne kombinácie veličín takúto jednotku dávajú

$$\text{sila} \times \text{dráha} \ , \ \text{hmotnosť} \times \text{rýchlosť}^2 \ , \ \text{hmotnosť} \times \text{zrýchlenie} \times \text{dráha}$$

- sčítavať môžeme iba veci s rovnakým rozmerom
- argumenty exponent, sínusov a kosínusov, logaritmov musia byť bezrozmerné
- mimoriadne dobrá na kontrolu počas výpočtov

Rozmerová analýza

Fontána strieka vodu do výšky H. Vo vzduchu je vždy hmotnosť vody M. Aký je výkon čerpadla fontány?

1. $P = \frac{MH}{2}\sqrt{gH}$
2. $P = \frac{gM}{2}\sqrt{gH}$
3. $P = \frac{MgH}{2}$

Rozmerová analýza

V nádobe s objemom V sa nachádza hmotnosť m_1 plynu 1 hmotnosť m_2 plynu 2. Aký je pri teplote T tlak vnútri tejto nádoby? Molové hmotnosti plynov sú M_1 a M_2

1. $p = \frac{RT}{V}(m_1 + m_2)$
2. $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1+m_2}{M_1+M_2}\right)$
3. $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)$
4. $p = \frac{V}{RT}\left(\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}\right)$
5. $p = \frac{RT}{V}\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}$
6. $p = \frac{RT}{V}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}$

Matematické nezrovnalosti

Matematické nezrovnalosti

- keď výsledok nedáva matematický zmysel - odmocninám a logaritmom sa nepáčia záporné čísla, neradi delíme nulou
- riešenie má niekedy veľmi špeciálny tvar pre veľmi nešpeciálne hodnoty parametrov

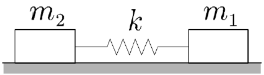
Matematické nezrovnalosti

Človek hádže z okraja útesu vysokého h kameň rýchlosťou v pod takým uhlom, aby doletel čo najďalej. Ako ďaleko v takom prípade kameň doletí?

1. $D = \frac{gh^2}{v^2}$
2. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)^2$
3. $D = \frac{v^2}{g}$
4. $D = \sqrt{\frac{v^2 h}{g}}$
5. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)$
6. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}$
7. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1+\frac{2gh}{v^2}}$
8. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1-\frac{2gh}{v^2}}$
9. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}}$

Matematické nezrovnalosti

Na dokonale hladkej vodorovnej podložke je pružina s tuhosťou k, na ktorej koncoch sú dve závažia s hmotnosťou m_1 a m_2. Aká bude perióda kmitov sústavy, ak niektoré zo závaží vychýlime z rovnovážnej polohy? Ak neviete, tak vedzte, že perióda kmitov závažia hmotnosti M na pružine tuhosti k je $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$



1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$
2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{km_1}}$
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1-m_2}{k}}$
4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$
5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1^2-m_1 m_2}{k(m_1+m_2^2)}}$
6. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{2k(m_1+m_2)}}$

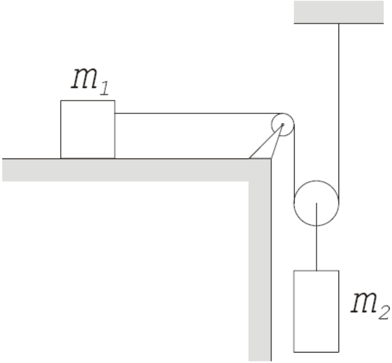
Správanie pri zmene parametrov

Správanie riešenia (pri zmene parametrov)

- doteraz skôr matematické vlastnosti výsledku, teraz začne hrať úlohu aj fyzikálny vhľad
- aké hodnoty výsledku očakávame?
- od čoho by mal výsledok závisieť a od čoho nie?
- keď tento parameter zväčšujem, bude sa výsledok zväčšovať, ale zmenšovať
- bude sa výsledok meniť monotónne? periodicky?

Správanie riešenia (pri zmene parametrov)

Určte zrýchlenie telesa m_1 sústavy na obrázku. Trenie ani hmotnosť kladky neuvažujte.



1. $a = \frac{m_1}{2m_1+m_2} g$
2. $a = \frac{2m_2}{4m_1+3m_2} g$
3. $a = \frac{2m_2}{4m_1+m_2} g$
4. $a = \frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)} g$

Výraz $\frac{x}{x+a}$ s rastúcim x pre kladné a rastie. Všimnite si, že pri rozumnom používaní nemôžeme nič stratiť, iba získať.

Správanie riešenia (pri zmene parametrov)

Človek hádže z okraja útesu vysokého h kameň rýchlosťou v pod takým uhlom, aby doletel čo najďalej. Ako ďaleko v takom prípade kameň doletí?

1. $D = \frac{gh^2}{v^2}$
2. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)^2$
3. $D = \frac{v^2}{g}$
4. $D = \sqrt{\frac{v^2 h}{g}}$
5. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)$
6. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}$
7. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1+\frac{2gh}{v^2}}$
8. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1-\frac{2gh}{v^2}}$
9. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}}$

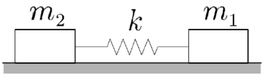
Symetrie úlohy

Symetrie úlohy

- skutočná symetria, keď situácia vyzerá rovnako z rôznych pohľadov, napríklad zrkadlová symetria
- symetria v označení, keď objektívny fyzikálny výsledok nemôže závisieť od toho, ako si my veci poznačujeme
- niekedy dohromady, zmena označenia vyrobí symetrickú situáciu

Symetrie úlohy

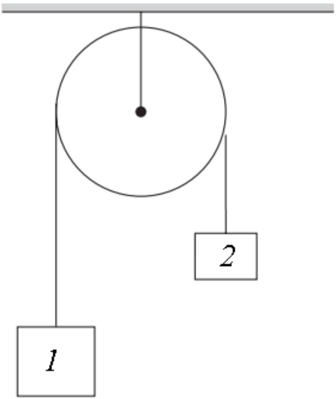
Na dokonale hladkej vodorovnej podložke je pružina s tuhosťou k, na ktorej koncoch sú dve závažia s hmotnosťou m_1 a m_2. Aká bude perióda kmitov sústavy, ak niektoré zo závaži vychýlime z rovnovážnej polohy? Ak neviete, tak vedzte, že perióda kmitov závažia hmotnosti M na pružine tuhosti k je $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$



1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$
2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{km_1}}$
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1-m_2}{k}}$
4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$
5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1^2-m_1 m_2}{k(m_1+m_2^2)}}$
6. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{2k(m_1+m_2)}}$

Symetrie úlohy

Cez nehmotnú kladku je prevesene lano, na koncoch ktorého sú telesá s hmotnosťou m_1 a m_2. Aké je zrýchlenie týchto telies. Smer nadol zoberme ako kladný.



1. $a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} g \ , \ a_2 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} g$
2. $a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} g \ , \ a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} g$
3. $a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+3m_2} g \ , \ a_2 = \frac{2m_2-2m_1}{m_1+m_2} g$
4. $a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} g \ , \ a_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} g$

Špeciálne a hraničné prípady

Špeciálne a hraničné prípady

- užitočné keď vieme, ako by mal výsledok vyzerať pri nejakej špeciálnej hodnote parametrov
- špeciálnosť je zväčša čosi ako nulová hodnota, nekonečná hodnota, hodnota „v strede“
- dva parametre rovnaké, jeden oveľa väčší ako druhý, jeden oveľa menší ako druhý

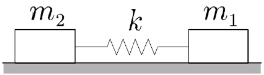
Špeciálne a hraničné prípady

V nádobe s objemom V sa nachádza hmotnosť m_1 plynu 1 hmotnosť m_2 plynu 2. Aký je pri teplote T tlak vnútri tejto nádoby? Molové hmotnosti plynov sú M_1 a M_2

1. $p = \frac{RT}{V}(m_1 + m_2)$
2. $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1+m_2}{M_1+M_2}\right)$
3. $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)$
4. $p = \frac{V}{RT}\left(\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}\right)$
5. $p = \frac{RT}{V}\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}$
6. $p = \frac{RT}{V}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}$

Špeciálne a hraničné prípady

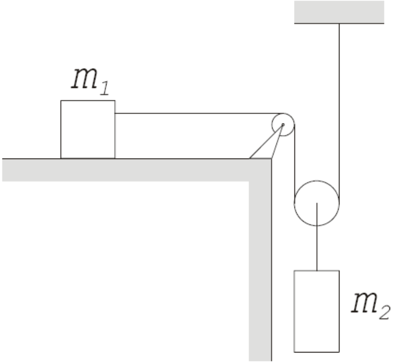
Na dokonale hladkej vodorovnej podložke je pružina s tuhosťou k, na ktorej koncoch sú dve závážia s hmotnosťou m_1 a m_2. Aká bude perióda kmitov sústavy, ak niektoré zo záváži vychýlime z rovnovážnej polohy? Ak neviete, tak vedzte, že perióda kmitov závážia hmotnosti M na pružine tuhosti k je $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$



1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$
2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{km_1}}$
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1-m_2}{k}}$
4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$
5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1^2-m_1 m_2}{k(m_1+m_2^2)}}$
6. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{2k(m_1+m_2)}}$

Špeciálne a hraničné prípady

Určte zrýchlenie telesa m_1 sústavy na obrázku. Trenie ani hmotnosť kladky neuvažujte.



1. $a = \frac{m_1}{2m_1+m_2} g$
2. $a = \frac{2m_2}{4m_1+3m_2} g$
3. $a = \frac{2m_2}{4m_1+m_2} g$
4. $a = \frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)} g$

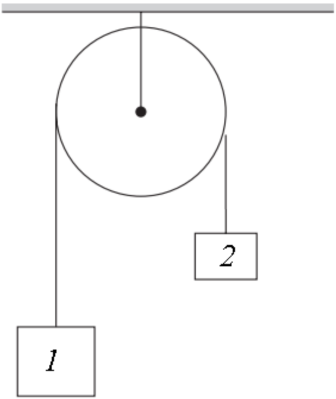
Výraz $\frac{x}{x+a}$ s rastúcim x pre kladné a rastie. Všimnite si, že pri rozumnom používaní nemôžeme nič stratiť, iba získať.

Špeciálne a hraničné prípady

- všimnite si, že ak máme dva parametre, niekedy je poslať jeden do nekonečna to isté, ako druhý do nuly
- a niekedy nie

Špeciálne a hraničné prípady

Cez nehmotnú kladku je prevesene lano, na koncoch ktorého sú telesá s hmotnosťou m_1 a m_2. Aké je zrýchlenie týchto telies. Smer nadol zoberme ako kladný.



1. $a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} g$, $a_2 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} g$
2. $a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} g$, $a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} g$
3. $a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+3m_2} g$, $a_2 = \frac{2m_2-2m_1}{m_1+m_2} g$
4. $a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} g$, $a_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} g$

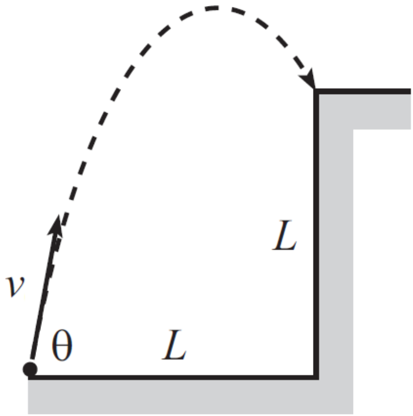
Špeciálne a hraničné prípady

Človek hádže z okraja útesu vysokého h kameň rýchlosťou v pod takým uhlom, aby doletel čo najďalej. Ako ďaleko v takom prípade kameň doletí?

1. $D = \frac{gh^2}{v^2}$
2. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)^2$
3. $D = \frac{v^2}{g}$
4. $D = \sqrt{\frac{v^2 h}{g}}$
5. $D = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{2gh}{v^2}\right)$
6. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}$
7. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1+\frac{2gh}{v^2}}$
8. $D = \frac{v^2}{g}\frac{1}{1-\frac{2gh}{v^2}}$
9. $D = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v^2}}$

Špeciálne a hraničné prípady

Vo vzdialenosti L od útesu výšky L hádžeme kameň pod uhlom θ. Akou veľkou rýchlosťou ho máme hodiť, aby trafil presne roh útesu?



1. $v = \sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta - 1)}}$
2. $v = \sqrt{\frac{gL}{2\tan\theta - 1}}$
3. $v = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta - 1)}}$
4. $v = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta + 1)}}$
5. $v = \sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta + 1)}}$

Špeciálne a hraničné prípady

- všimnite si, že matematická nezrovnalosť tu nebola problémom, ale žiadanou vlastnosťou riešenia

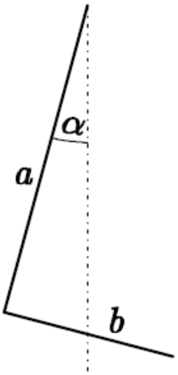
Špeciálne a hraničné prípady

Pohyblivé schody prenesú stojaceho pasažiera z jedného podlažia na druhé za čas t_1. Ak pohyblivé schody stoja, prejde po nich pasažier z jedného podlažia na druhé za čas t_2. Za akú dobu prejde pasažier ak kráča po pohybujúcich sa schodoch z jedného podlažia na druhé (pasažier ide v smere pohybujúcich sa schodov)?

1. $T = \frac{t_1^2}{t_1+t_2}$
2. $T = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}$
3. $T = \frac{t_1 t_2}{t_1-t_2}$
4. $T = \frac{t_1^2 t_2^2}{t_1^3+t_2^3}$
5. $T = \frac{t_1^2+t_2^2}{t_1+t_2}$
6. $T = \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}$

Špeciálne a hraničné prípady

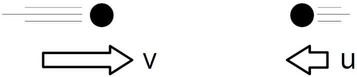
Zalomená tyč tvaru L s ramenami z rovnakého materiálu dĺžky a, b je upevnená v koncovom bode ramena a tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej bodom upevnenia kolmo na rovinu určenú ramenami tyče. Aký uhol zviera rameno a zalomenej tyče so zvislým smerom v rovnovážnej polohe?



1. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b^2}{b^2+2ba}$
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{b^2+2ba}$
3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2+2ba}$
4. $\sin\alpha = \frac{b^2}{b^2+2ba}$

Špeciálne a hraničné prípady

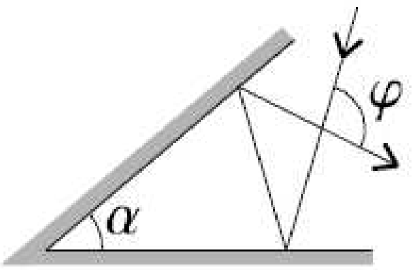
Dve rovnaké guličky proti sebe letia rýchlosťami v a u. Aké sú ich rýchlosti po zrážke?



1. $v' = -u, u' = v$
2. $v' = -u, u' = 2v$
3. $v' = -\frac{u-v}{u+v}u, u' = \frac{u-v}{u+v}v$

Špeciálne a hraničné prípady

Dve zrkadlá zvierajú uhol α. Dopadajúci lúč sa najskôr odrazí od prvého, potom od druhého (pozri obrázok). Aký uhol φ zviera vstupujúci a vystupujúci lúč?



1. $\varphi = 2\alpha$
2. $\varphi = 180° - 2\alpha$
3. $\varphi = 90° - \alpha$
4. $\varphi = 360° - 2\alpha$